

STRAHLUNGSTRANSPORT IN EINEM STARK MAGNETISIERTEN PLASMA

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Werner Nagel
aus Detmold

München, den 29. Juli 1981

1982



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555209_0032

STRAHLUNGSTRANSPORT IN EINEM STARK MAGNETISIERTEN PLASMA

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Werner Nagel
aus Detmold

München, den 29. Juli 1981

1. Gutachter: Prof. Dr. J. Trümper

2. Gutachter: Prof. Dr. H.-G. Groth

Auswärtiger Gutachter: Prof. Dr. H. Ruder

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Mai 1982



ZUSAMMENFASSUNG

Im Hinblick auf mögliche Modelle von kosmischen pulsierenden Röntgenquellen werden die Polarisation, die Richtungsverteilung und das Spektrum der Röntgenstrahlung eines sehr heißen ($\sim 10^8$ K) und stark magnetisierten ($\sim 10^{12}$ G) Plasmas theoretisch untersucht.

Nach einer Zusammenfassung bereits bekannter Forschungsergebnisse über Zyklotronabsorption, Thomson-Streuung und frei-frei-Absorption in einem stark magnetisierten Plasma (Kap. 2) werden die benutzte Strahlungstransportgleichung und die bei ihrer Herleitung gemachten Näherungen diskutiert (Kapitel 3).

Unter der Annahme kohärenter Streuung werden im Kapitel 4 Spektren berechnet. Es zeigt sich, daß die Existenz von zwei Polarisationsmoden mit sehr unterschiedlichen freien Weglängen einen großen Einfluß auf das Spektrum der entweichenden Strahlung hat.

Die durch das Magnetfeld hervorgerufene Anisotropie wird im Kapitel 5 eingehend untersucht. Richtcharakteristiken von strahlenden Plasma-Schichten und Säulen werden sowohl mit Hilfe der Diffusionsnäherung als auch mit einem genaueren numerischen Verfahren (Feautrier-Methode) berechnet. Beide Verfahren liefern qualitativ übereinstimmende Ergebnisse, insbesondere eine stark frequenzabhängige Strahlungs-Charakteristik des Plasmas.

Im 6. Kapitel werden die Energieänderungen der Photonen bei Stößen mit Elektronen berücksichtigt ("Comptonisierung"). Gleichzeitig wird der Prozeß der Bildung von Zyklotronlinien bei "Frequenz-Umverteilung" studiert. Nur bei sehr kleinen optischen Tiefen ergeben sich Emissionslinien, die bei wachsender optischer Tiefe Selbst-Umkehr zeigen und schließlich in Absorptionslinien übergehen.

Abschließend werden diese Ergebnisse mit Beobachtungen an der pulsierenden Röntgenquelle Her X-1 verglichen (Kap. 7). Um das Modell den Beobachtungen anzupassen, müssen wir eine relativ hohe Dichte des strahlenden Plasmas ($\geq 1 \text{ g cm}^{-3}$) annehmen. Aus den Modell-Spektren ergibt sich, daß die beobachtete Struktur im Spektrum von Her X-1 wahrscheinlich eine Absorptionslinie ist.

INHALTSÜBERSICHT

1. Einleitung	
1.1. Röntgenastronomische Beobachtungen	1
1.2. Modellvorstellungen	4
1.3. Problemstellung	9
1.4. Zielsetzung dieser Arbeit	11
2. Strahlungsprozesse und Strahlungsausbreitung in einem stark magnetisierten Plasma	
2.1. Elektronenzustände in einem Magnetfeld	16
2.2. Zyklotron-Absorption und Emission	18
2.3. Thomson-Streuung in einem stark magnetisierten Plasma	22
2.4. Frei-frei-Absorption in einem stark magnetisierten Plasma	27
2.5. Die Polarisationsmoden eines kalten Plasmas	35
3. Strahlungstransporttheorie	
3.1. Die Transportgleichung	41
3.2. Die Behandlung der Polarisation	46
3.3. Einige Grundbegriffe der Strahlungstransporttheorie	49
3.4. Absorption und Streuung	52
4. Die Polarisationsabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte und ihr Einfluß auf das Spektrum	
4.1. Die Diffusionsgleichungen für ordentliche und außerordentliche Photonen	56
4.2. Lösung der gekoppelten Diffusionsgleichungen	57
4.3. Modellspektren	63
5. Die Anisotropie der entweichenden Strahlung	
5.1. Angenäherte Berechnung der Winkelverteilung	70
5.2. Erweiterung des Systems der Diffusionsgleichungen	75
5.3. Die Feautrier-Methode	79
5.4. Ergebnisse	82
6. Die Comptonisierung von Photonen und die Bildung von Zyklotron-Linien bei Frequenz-Umverteilung	
6.1. Der differentielle Wirkungsquerschnitt	92
6.2. Anwendung der Feautrier-Methode	100
6.3. Ergebnisse	106

7. Astrophysikalische Schlußfolgerungen

7.1. Das Beobachtungsmaterial	117
7.2. Modelle	119
7.3. Ausblick	130

Literaturverzeichnis	134
----------------------	-----

1. EINLEITUNG

1.1. Röntgenastronomische Beobachtungen

Die Röntgenastronomie ist ein sehr junger Wissenschaftszweig. Als ihr Geburtsdatum gilt das Jahr 1962, als zum ersten Mal Röntgenstrahlung von einem Objekt im Sternbild Skorpion ("Sco X-1") nachgewiesen wurde (Giacconi et al. 1962). Da die Erdatmosphäre Röntgenstrahlung absorbiert, sind solche Beobachtungen nur mit hoch fliegenden Ballonen, Raketen oder Satelliten möglich. Bei den ersten Raketenflügen gewann man nur Momentaufnahmen eines kleinen Teils des Röntgenhimmels, und so ist es zu verstehen, daß der eigentliche Aufschwung der Röntgenastronomie mit dem Start des Satelliten UHURU im Jahr 1970 begann (Giacconi et al. 1972). Durch die Möglichkeit kontinuierlicher und systematischer Beobachtungen wuchs die Zahl der Quellen und die Genauigkeit des Beobachtungsmaterials sprunghaft an. Ein ähnlicher Sprung vorwärts gelang mit dem Einstein- Observatorium, das Ende 1978 in eine Umlaufbahn um die Erde gebracht wurde (Giacconi et al. 1979). Dieser Satellit verfügt über ein abbildendes Röntgenteleskop, mit dem eine ungeahnte Steigerung der Empfindlichkeit und des Auflösungsvermögens möglich wurde. Nur eine der unerwarteten neuen Erkenntnisse, die man aus der Auswertung der Daten gewonnen hat, ist die, daß auch viele "normale" Sterne in der Sonnenumgebung Röntgenstrahler sind (Harnden et al. 1979).

Zu den interessantesten Objekten am Röntgenhimmel zählen die schon von UHURU entdeckten pulsierenden Röntgenquellen, wie Cen X-3 (Schreier et al. 1972) oder Her X-1 (Tananbaum et al. 1972). Wie schon der Name andeutet, blitzen diese Sterne im

Röntgenlicht periodisch auf, im Rhythmus von einigen Sekunden bis Minuten. Die erste Zeichnung zeigt die Form der Röntgenpulse von Her X-1 in mehreren Energiebereichen. Die Pulsperiode ist bei dieser Quelle 1.24 sec. Diese Periode ist nicht genau konstant, sondern pendelt um einen Mittelwert, wobei die Periode dieses Pendelns 1.7 Tage beträgt. In demselben Rhythmus von 1.7 Tagen setzt das Röntgenlicht für jeweils 6 Stunden aus. Außerdem zeigt Her X-1 einen 35-tägigen Wechsel zwischen Zuständen hoher und niedriger Röntgenleuchtkraft (Tananbaum et al. 1972).

Nicht nur das Zeitverhalten dieser Quelle ist bemerkenswert, sondern auch ihr Spektrum, das in Abbildung 2 dargestellt ist. Die Zeichnung beruht auf Messungen des Satelliten OSO-8 im weichen Röntgenbereich (< 20 keV), und im harten Röntgenbereich (> 20 keV) auf Ballonbeobachtungen einer Gruppe des Max-Planck-Instituts für extraterrestrische Physik und des Astronomischen Instituts der Universität Tübingen. Am Spektrum fällt auf, daß es nicht glatt verläuft wie das Spektrum eines Schwarzen Körpers oder wie ein Bremsstrahlungsspektrum, sondern Linien bei etwa 58 keV und 110 keV aufweist. Die Entdeckung dieser Linien (Trümper et al. 1977) hat theoretische Vorhersagen (Gnedin und Sunyaev 1974a) eindrucksvoll bestätigt. Zugleich stellt sie eine Herausforderung dar, unsere theoretischen Ideen über Röntgensterne wie Her X-1 zu verfeinern und in quantitative Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu bringen.

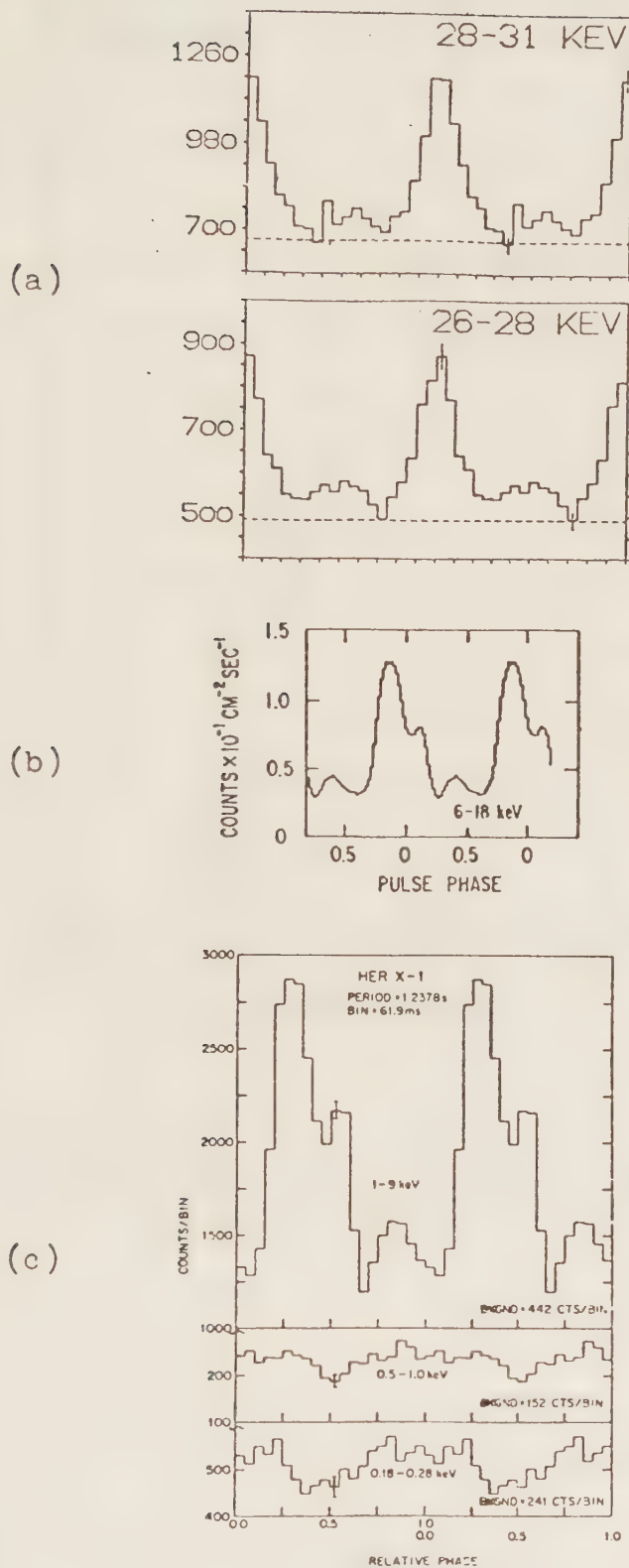


Abb. 1: Form der Röntgenpulse von Her X-1 in verschiedenen Energiebereichen
 (a) 26 ... 31 keV (Voges, private Mitteilung)
 (b) 6 ... 18 keV (Pravdo et al. 1979a)
 (c) 0.5 ... 9 keV (Shulman et al. 1975)

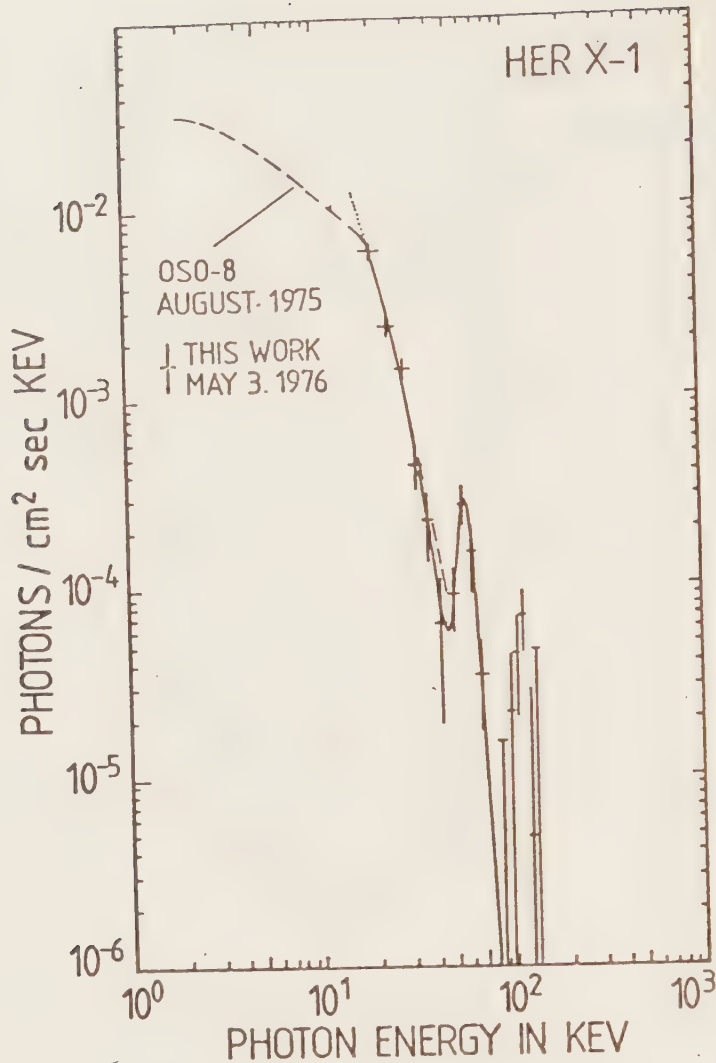


Abb. 2: Spektrum von Her X-1, nach Ballonbeobachtungen vom 3. Mai 1976 (Trümper et al. 1978) und Messungen des Satelliten OSO-8 (Becker et al. 1977)

1.2. Modellvorstellungen

Die regelmäßigen Schwankungen der Pulsperiode lassen sich plausibel nur als Dopplerverschiebung deuten: die Periode ist kürzer, wenn sich die pulsierende Röntgenquelle uns nähert, und länger, wenn sie sich von uns entfernt. Wir haben es also mit einem Doppelsternsystem zu tun, in dem die Röntgenquelle einen

anderen Stern umkreist (Tananbaum et al. 1972). Diese Vorstellung wird erhärtet durch das periodische Ausbleiben der Röntgenpulse (alle 1.7 Tage), wenn der Röntgenstern hinter seinem Begleiter verschwindet.

Die hohe Regelmäßigkeit der 1.24 sec-Pulsation deutet auf eine schnelle Rotation des Röntgensterns hin. Dabei kann es sich weder um einen normalen Stern noch um einen "Weißen Zwerg" handeln, weil die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator die Schwerebeschleunigung überwiegen würde. Die einzigen Sterne, die so schnell rotieren können (Gold 1968), sind die 1934 - kurz nach der Entdeckung des Neutrons - von Baade und Zwicky vorhergesagten Neutronensterne. Mit einer Masse von etwa 1.4 Sonnenmassen und einem Radius von etwa 10 km (Arnett und Bowers 1977) sind diese Objekte so kompakt, daß sie auch bei 100 Umdrehungen pro Sekunde noch stabil sind. So ergibt sich das Bild eines schnell rotierenden Neutronensterns, der mit einer Periode von 1.7 Tagen einen anderen Stern umkreist. Dieser andere Stern ist übrigens im optischen Spektralbereich sichtbar - dem Astronomen Hoffmeister (1941) fiel er schon vor Jahrzehnten als scheinbar irregulär Veränderlicher auf ("HZ Her"). Erst 1972 erkannte man in den Helligkeitsänderungen Periodizitäten von 1.7 Tagen und 1.24 sec, wodurch der Zusammenhang mit der Röntgenquelle Her X-1 bewiesen wurde (Forman et al. 1972). Aus optischen Beobachtungen gelang es auch, die Entfernung von Her X-1 abzuschätzen: etwa 2-6 kpc (Tucker und Blumenthal 1974). Aus dem beobachteten Röntgenfluß und der Entfernung findet man die Leuchtkraft der Röntgenquelle zu $\sim 10^{37}$ erg sec⁻¹, das ist das 2500-fache der Leuchtkraft unserer Sonne!

Es stellt sich die Frage, welche physikalischen Prozesse

solche gewaltigen Energien freisetzen. Schon 1964 wies Zel'dovich darauf hin, daß bei der Akkretion von Materie durch ein kompaktes Objekt große Energien freigesetzt werden können. Im freien Fall auf einen Neutronenstern erreicht ein Körper eine Geschwindigkeit von etwa ($R \sim 10^6 \text{ cm}$, $M \sim 1 M_\odot$)

$$\left(\frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 1.6 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$$

also etwa die Hälfte der Lichtgeschwindigkeit. Ein einzelnes Wasserstoffatom (Ruhemasse $m_H = 940 \text{ MeV}/c^2$) erreicht eine kinetische Energie von

$$\frac{GMm_H}{R} \sim 140 \text{ MeV}$$

Die verfügbare Energie ist also mehr als ein Zehntel der Ruheenergie, $m_H c^2$, der eingesetzten Teilchen (Zel'dovich 1964). Für die beobachtete Leuchtkraft $L_X \sim 10^{37} \text{ erg/sec}$ von Her X-1 bräuchte man daher eine Akkretionsrate von

$$\begin{aligned} &4.5 \cdot 10^{40} \text{ H-Atome pro Sekunde} \\ &\text{oder } 7.4 \cdot 10^{16} \text{ g sec}^{-1} \\ &\text{oder } 1.2 \cdot 10^{-9} \text{ Sonnenmassen pro Jahr.} \end{aligned}$$

Das heißt: selbst geringe Mengen von Gas, die von dem Stern HZ Her abströmen, reichen aus, um die beobachtete Leuchtkraft für Jahrtausende aufrechtzuerhalten. Wenn dieser Prozeß 10^6 Jahre andauert, würde der normale Stern (andere Massenverluste ausgeschlossen) nur etwa 1% seiner Masse verlieren.

Beim Aufprall der Teilchen auf die Oberfläche des Neutronensterns wird deren kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Die Temperatur, die sich dabei einstellt, hängt in erster Linie davon ab, wieviel Energie durch die einfallenden Teilchen zugeführt, und wieviel durch entweichende Strahlung abgeführt wird. Es ist fraglich, ob man bei diesem Problem

Überhaupt von einer Temperatur sprechen kann. Höchstwahrscheinlich sind Protonen, Elektronen und Photonen nicht miteinander im Gleichgewicht (Langer et al. 1980). Wegen ihrer großen Masse tragen die Protonen den Hauptteil der Energie, geben aber andererseits nur wenig Strahlung ab. Die Energie wird also von den Protonen auf die Elektronen, und von diesen auf die Photonen übertragen. Unter der Annahme, daß die Energie der einfallenden Protonen gleichmäßig auf den ganzen Neutronenstern verteilt wird, und daß dieser wie ein Schwarzer Körper strahlt, kann man die Temperatur mit Hilfe des Stefan- Boltzmannschen Gesetzes abschätzen:

$$L_x = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

$$L_x \sim 10^{37} \text{ erg sec}^{-1}, R \sim 10^6 \text{ cm} \Rightarrow T \sim 10^7 \text{ K}.$$

Das Spektrum des Schwarzen Körpers hat sein Maximum bei etwa 3 kT, das sind ungefähr 3 keV. Die meiste Energie würde also im weichen Röntgenbereich abgestrahlt. - Die Temperatur von 10^7 K ist jedoch nur eine untere Grenze. Zum einen ist die Voraussetzung sofortiger Thermalisierung der einfallenden Ionen nicht erfüllt, d.h. daß die Energie viel stärker auf einige strahlende Elektronen konzentriert sein kann, und zum anderen folgt aus der Pulsation, daß nicht die gesamte Neutronensternoberfläche gleichmäßig strahlt. Wenn die Strahlung nur von ein oder zwei "heißen Flecken" kommt, die vielleicht 1% der Fläche des Neutronensterns ausmachen, muß deren Temperatur mindestens um einen Faktor 3 höher sein.

Die Existenz von heißen Flecken ergibt sich nahezu zwangsläufig aus der Anwesenheit eines Magnetfelds. Das akkretierte Gas ist der ionisierenden Röntgenstrahlung ausgesetzt

und wird außerdem durch adiabatische Kompression beim Sturz auf den Neutronenstern stark aufgeheizt. Das ionisierte Gas (Plasma) muß aber den magnetischen Feldlinien folgen und kann daher nur an den magnetischen Polen auf den Neutronenstern stürzen (Lamb et al. 1973).

Da die Leitfähigkeit stellarer Materie sehr hoch ist, läßt sich die Magnetfeldstärke mit Flußerhaltungsargumenten abschätzen (Pacini 1967). Normale Sterne wie die Sonne haben an der Oberfläche Felder bis zu $10^2 \dots 10^3$ Gauß. Beim Kollaps zu einem Neutronenstern würde sich die Feldstärke umgekehrt proportional zur Oberfläche vergrößern, also etwa auf

$$B = B_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \sim 10^{12} \dots 10^{13} \text{ Gauß.}$$

Hinweise auf Magnetfelder dieser Größenordnung liefert auch die langsame Zunahme der Perioden von Radiopulsaren. Die beobachteten Abbremsraten stehen in guter Übereinstimmung mit dem Energieverlust, den ein rotierender magnetischer Dipol der Stärke $\sim 10^{30}$ Gauß cm³ durch Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle erfährt (Ruderman 1972). Bei einer Lineardimension von $\sim 10^6$ cm schließt man ebenfalls auf ein (Oberflächen-) Feld von $\sim 10^{12}$ Gauß.

Die Gyrationbewegung von Elektronen in einem Magnetfeld von 10^{12} Gauß erfolgt mit einer Frequenz

$$\nu_c = \frac{eB}{2\pi mc} \sim 2.8 \cdot 10^{18} \text{ Hz.}$$

Die dabei auftretende Strahlung (Zyklotronstrahlung) liegt im Röntgenbereich, ihre Wellenlänge bei 1 Å, ihre Energie bei 11.6 keV. Wenn nun die Röntgenstrahlung von Her X-1 von den magnetischen Polen eines Neutronensterns kommt, ist es

naheliegend, die beiden Linien im Spektrum als Zyklotronlinien zu deuten. Schon 1974 hatten Gnedin und Sunyaev (1974a) auf die Möglichkeit hingewiesen, Zyklotronemission von Weißen Zwergen und Neutronensternen zu beobachten. Das besondere an der Entdeckung von Zyklotronlinien bei Her X-1 war, daß damit zum ersten Mal die Magnetfeldstärke gemessen wurde. Aus der Zyklotron- Energie von 58 keV ergibt sich eine Feldstärke von $5.3 \cdot 10^{12}$ Gauß, was die obige Abschätzung schön bestätigt.

1.3. Problemstellung

Es ist bekannt, welche Fülle von Informationen man aus den Linien in Sternspektren gewinnen kann: Elementhäufigkeiten, Dichten, Temperaturen, und auf dem Weg über die Dichte sind sogar Aussagen über die Schwerebeschleunigung, d.h. Masse und Radius möglich (Unsöld 1955). Entsprechend erlauben auch die Zyklotronlinien Rückschlüsse auf die physikalischen Verhältnisse an der Oberfläche von Neutronensternen. Außer vom Magnetfeldverlauf hängt die Form der Zyklotronlinie auch vom Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil des strahlenden Gebiets ab; eine genaue Analyse könnte somit auch Information liefern über den Abbremsungsprozeß, d.h. den Mechanismus der Umwandlung der kinetischen Energie in Strahlung.

Das Spektrum und die Pulsformen hängen von solchen Einzelheiten in nicht trivialer Weise ab. Es ist notwendig, bestimmte Modelle vorzugeben, und für viele verschiedene Modelle eine Strahlungstransportrechnung durchzuführen, die jeweils das Spektrum und die Winkelverteilung der entweichenden Röntgenstrahlung liefert. Dann erst kann man durch Vergleich mit den Beobachtungen entscheiden, welches Modell der Wirklichkeit am

1.

nächsten kommt.

Für jede Strahlungstransportrechnung gibt es zwei Grundvoraussetzungen: erstens die Bestimmung der Absorptions-, Emissions- und Streukoeffizienten für Photonen, und zweitens die genaue Kenntnis der Geometrie des Mediums. Das folgende Schema soll dies verdeutlichen:

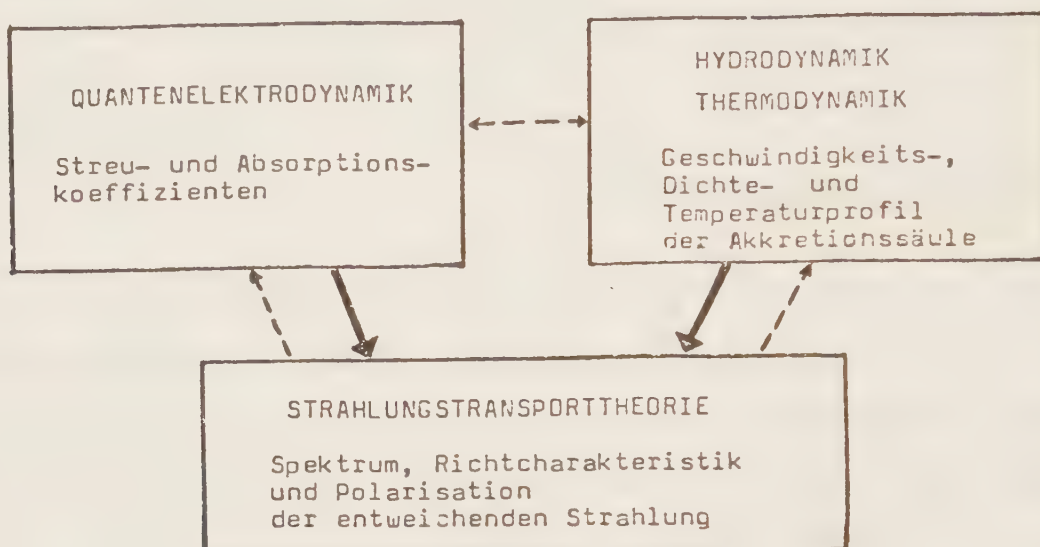


Abb. 3

Das erste Problem ist quantenelektrodynamischer Art. Während die Koeffizienten für Zyklotronemission schon lange bekannt sind (Trubnikov 1958, Drummond und Rosenbluth 1963), wurden Streuung und frei-frei Emission in einem starken Magnetfeld erst in jüngster Zeit näher untersucht (Lodenquai et al. 1971, Gnedin und Sunyaev 1974b, Pavlov und Panov 1976, Ventura 1979, und darin zitierte Literatur). In nichtrelativistischer Näherung liegen die Wirkungsquerschnitte in einer Form vor, die unmittelbar in einer Transportrechnung verwendet werden kann.

Das zweite Problem ist hydrodynamischer und thermodynamischer Art. Es geht darum, die Geschwindigkeits-, Dichte- und Temperaturverteilung in dem auf den Neutronenstern

herabstürzenden Plasma zu bestimmen. Ansätze dazu wurden schon von Davidson (1973) und von Basko und Sunyaev (1976) gemacht, unter stark vereinfachenden Annahmen. Das Hauptproblem dabei ist, daß Geschwindigkeit und Temperatur des Plasmas sehr stark vom Strahlungsdruck beeinflußt werden. Den Strahlungsdruck kennt man jedoch erst dann, wenn man das Strahlungstransportproblem gelöst hat. Die Strahlung wirkt nicht nur auf die Strömung, d.h. die Geometrie der Akkretionshülle, sondern auch auf die Wirkungsquerschnitte zurück, da die Absorptions- und Emissionskoeffizienten von der Besetzung der Landau-Niveaus abhängen, und die Besetzung vorwiegend durch Strahlungs- An- und Abregung erfolgt. Außerdem bewirkt das makroskopische Strömen des Plasmas eine Doppler- Verschiebung der Zyklotronresonanz, hat also ebenfalls einen Einfluß auf die Wirkungsquerschnitte. Die gestrichelten Pfeile in Abb. 3 sollen diese wechselseitigen Abhängigkeiten andeuten.

Das Problem, allein aus der Angabe von Masse und Radius eines Neutronensterns, der Stärke des Dipolfelds, und der Akkretionsrate ein selbstkonsistentes Modell zu berechnen, dürfte noch für einige Zeit seiner Lösung widerstehen. In dieser Arbeit werden wir uns auf das Teilproblem des Strahlungstransports konzentrieren, und über Geometrie und Wirkungsquerschnitte bestimmte vereinfachende Annahmen machen.

1.4. Zielsetzung dieser Arbeit

Das hydrodynamische Teilproblem wird ausgeklammert, indem wir die einfachst mögliche Annahme über die Struktur des strahlenden Gebiets machen: wir setzen ein völlig homogenes, ruhendes Plasma voraus, d.h. konstante Dichte und Temperatur.

(Die Frage, welche Temperatur konstant sein soll, und die Anwendbarkeit einer Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten in einer Nicht- Gleichgewichts- Situation werden wir genauer in Kapitel 3 diskutieren.) Was die Geometrie angeht, werden wir entweder eine Schicht annehmen (als Modell für einen "heißen Fleck"), oder einen langen Zylinder (als Modell für eine Akkretionssäule) . In beiden Fällen ist das Medium eindimensional: bei dem heißen Fleck betrachten wir nur die Diffusion der Photonen durch die Schicht hindurch, und bei der Säule nur die Diffusion quer zur Achse. Die Annahme einer ruhenden Säule bedeutet keine Einschränkung mehr, da die Säule als homogen angenommen wird, und damit eine Lorentz-Transformation das Problem löst. Natürlich entgehen uns dadurch interessante Effekte. Die Dopplerverschiebung bei differentiell expandierenden Sternatmosphären prägt zum Beispiel die Form von bestimmten Spektrallinien, sog. P Cygni -Profilen (Mihalas 1978, S.447 ff.). In dieser Arbeit werden wir solche Komplikationen außer acht lassen und in erster Linie die neuen Effekte untersuchen, die mit dem Einfluß eines starken Magnetfelds auf die Ausbreitung von Licht in einem Plasma zusammenhängen.

Auch bei dem quantenelektrodynamischen Teilproblem werden wir eine Reihe von Vereinfachungen machen. Dazu gehört die Benutzung nichtrelativistischer Formeln und die Dipolnäherung. Wegen der Dipolnäherung treten in unseren Wirkungsquerschnitten keine höheren Harmonischen der Zyklotronresonanz auf. Um die Stärke der höheren Harmonischen im Spektrum zu berechnen, ist es erforderlich, die Besetzung der höheren Landau-Niveaus im Einklang mit der lokalen Photonendichte zu berechnen. Dies geht jedoch über das hier gesteckte Ziel hinaus. Durch die Annahme, daß die Besetzung der höheren Landau-Niveaus vernachlässigbar

ist, beschränken wir uns auf das reine Strahlungstransportproblem ("random walk problem"), ohne uns um die Elektronen-Verteilungsfunktion zu kümmern. Im Hinblick auf die Röntgenquelle Her X-1 erscheint diese Vereinfachung auch dadurch gerechtfertigt, daß nur wenige der aus dem strahlenden Gebiet entweichenden Photonen Energien vergleichbar oder über der Zyklotronenergie haben (Trümper 1978a; siehe auch Abb. 2). Zumindest in den äußeren Schichten dürften die höheren Landau-Niveaus daher kaum besetzt sein.

Schließlich machen wir selbst bei der Behandlung des Strahlungstransports eine Näherung: die Terme in der Transportgleichung, die stimulierte Streuung beschreiben, werden ignoriert. Diese Terme sind proportional zur Intensität sowohl der einfallenden als auch der gestreuten Wellen. Im Fall kohärenter Streuung heben sich diese Terme heraus, weil die Streuung von einem Winkel ϑ zu einem Winkel ϑ' genauso wahrscheinlich ist wie der inverse Prozeß. Bei inkohärenter Streuung, d.h. wenn ein Photon bei dem Streuprozess Energie aufnimmt ($\omega' > \omega$) oder abgibt ($\omega' < \omega$), kompensieren sich diese Terme nicht mehr. Ob Energieaufnahme oder -abgabe wahrscheinlicher ist, hängt von der Frequenz ω und der Temperatur des Mediums ab. Die Vernachlässigung der stimulierten Streuung führt zu einer linearen Transportgleichung, d.h. jedes Photon diffundiert in dem Medium unabhängig von allen anderen Photonen. Dadurch vereinfacht sich die Lösung des Transportproblems erheblich, ob man die Transportgleichung nun analytisch (z.B. Sunyaev und Titarchuk 1980), mit einem Differenzenverfahren (Miyamoto 1978), oder durch Monte-Carlo-Simulation löst (Pozdnyakov et al. 1979; für den Fall stark magnetisierter Plasmen siehe auch Yahel 1980a,b).

1.

Weitere, wenn auch nicht so einschneidende Näherungen betreffen die Ablenkung des Lichts im Gravitationsfeld, und die Lichtbrechung durch das Plasma. Aus der Schärfe der bei Her X-1 beobachteten Zyklotronlinien folgt, daß das strahlende Gebiet relativ klein sein muß (Trümper et al. 1978). Daher kann man die Ablenkung und Rotverschiebung der Photonen innerhalb des Mediums vernachlässigen. Wichtig ist nur die Rotverschiebung der Photonen nach dem Verlassen der Akkretionssäule. Dies bewirkt aber lediglich eine gleichmäßige Verschiebung des gesamten Spektrums und ist deshalb nachträglich leicht zu berücksichtigen.

Der Brechungsindex des Plasmas beeinflusst die Dichte der Photonenzustände und damit die Wirkungsquerschnitte. Außerdem macht die durch das Magnetfeld bedingte Anisotropie eine Unterscheidung zwischen der Richtung des Wellenvektors und der Richtung des Energietransports erforderlich (Bekefi 1966, Kap. 1.6). Da wir das Plasma als homogen ansehen, bewirkt die Lichtbrechung keine Krümmung der Photonenbahnen. Aber an der Oberfläche der Akkretionssäule kann im Prinzip Brechung, und auch Umwandlung der Polarisierung der Photonen stattfinden (Stix 1965). Diese Effekte spielen eine große Rolle bei der Zyklotronemission von Laborplasmen (Hosea et al. 1977). Die Einzelheiten hängen stark von der Struktur der Übergangsschicht Plasma - Vakuum ab. Über diese Schicht ist im Falle der akkretierenden Neutronensterne begreiflicherweise wenig bekannt. Es ist aber wahrscheinlich, daß die Dicke dieser Schicht viel größer ist als die Wellenlänge der Strahlung. Dadurch dürften diese Effekte weniger ausgeprägt sein als bei Laborplasmen. Ferner sind die in Betracht zu ziehenden Dichten so niedrig, daß die Abweichungen des Brechungsindex vom Wert 1 von der Größenordnung 10^{-6} sind (Ventura 1979). Daher erscheint es gerechtfertigt, diese Effekte

zu vernachlässigen.

Der wichtigste Einfluß des Plasmas auf die Lichtausbreitung besteht in der Änderung der Polarisierung des Lichts (Faraday-Effekt); siehe z.B. Shibano 1978. Im Kapitel 4 werden wir uns genauer mit der Polarisationsabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte und ihrem Einfluß auf den Strahlungstransport befassen. Das Kapitel 5 ist der Untersuchung der durch die Winkelabhängigkeit der Polarisationsmoden geprägten Anisotropie der Strahlung gewidmet. Im 6. Kapitel schließlich werden wir die Frequenzabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte analysieren, und bei der Behandlung des Strahlungstransports die Änderung der Frequenz bei der Streuung der Photonen im Detail berücksichtigen.

Es wird sich zeigen, daß sich sowohl die Polarisations-, als auch die Winkel- und Frequenzabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte markant in der ausgesandten Strahlung niederschlägt. In dieser Arbeit werden wir jeden dieser Effekte getrennt untersuchen. Erst wenn wir anhand stark idealisierter Modelle den Einfluß eines starken Magnetfelds auf die Ausbreitung von Strahlung genauer verstanden haben, werden wir im letzten Kapitel auf die komplizierteren Verhältnisse bei akkretierenden Neutronensternen zurückkommen. Dort werden wir dann mögliche Schlußfolgerungen über die Natur der Röntgenquelle Her X-1 diskutieren.

2. STRAHLUNGSPROZESSE UND STRAHLUNGS-AUSBREITUNG IN EINEM STARK MAGNETISIERTEN PLASMA

2.1. Elektronenzustände in einem Magnetfeld

Aufgrund der Lorentz-Kraft bewegen sich geladene Teilchen in einem homogenen Magnetfeld auf Spiralbahnen, mit einer Gyrationfrequenz von

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \quad (1)$$

Quantenmechanisch drückt sich die besondere Rolle der Zyklotronfrequenz darin aus, daß die Energieniveaus eines Elektrons im Magnetfeld sich um Vielfache von $\hbar\omega_c$ unterscheiden (siehe Abbildung 4). Die Energie der "Landau-Niveaus" ist gegeben durch (Landau 1930)

$$E(n, p_z) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + \frac{p_z^2}{2m} \quad (2)$$

wobei p_z der Impuls in Magnetfeldrichtung ist. Die Bewegung entlang der Feldlinien ist nicht quantisiert und liefert lediglich den Beitrag $p_z^2/2m$ zur Energie. Die Zustände mit vorgegebenem n und p_z sind unendlich-fach entartet, entsprechend der Tatsache, daß die Energie eines Elektrons nicht davon abhängt, um welche Feldlinie es gyriert (Landau, Lifschitz 1974, S. 440).

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen lassen sich wie beim harmonischen Oszillator durch Auf- und Absteige-Operatoren definieren (Canuto und Ventura, 1977, S.335). In zylindersymmetrischer Eichung, $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$, mit $m\vec{v} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$ (für Elektronen, Ladung $-e$), und $v_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x \pm i v_y)$ läßt sich der Aufsteige-Operator schreiben

$$a^{\dagger} = (m / \hbar \omega_c)^{\frac{1}{2}} v_{+} \quad (3)$$

Entsprechend bewirkt

$$a = (m / \hbar \omega_c)^{\frac{1}{2}} v_{-} \quad (4)$$

den Übergang zum nächsttieferen Landau-Niveau. Der transversale Teil des Hamilton-Operators hat dann die Form

$$H_{\perp} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2) = \hbar \omega_c \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

Es läßt sich ein ähnliches Paar von Operatoren definieren, das Übergänge zwischen den entarteten Zuständen bewirkt (d.h. eine Verschiebung des Gyrationenzentrums):

$$\begin{aligned} b &= (m \omega_c / \hbar)^{\frac{1}{2}} (r_{+} - v_{+} / \omega) \\ b^{\dagger} &= (m \omega_c / \hbar)^{\frac{1}{2}} (r_{-} - v_{-} / \omega) \end{aligned} \quad (6)$$

Der transversale Teil der Wellenfunktionen eines Elektrons in

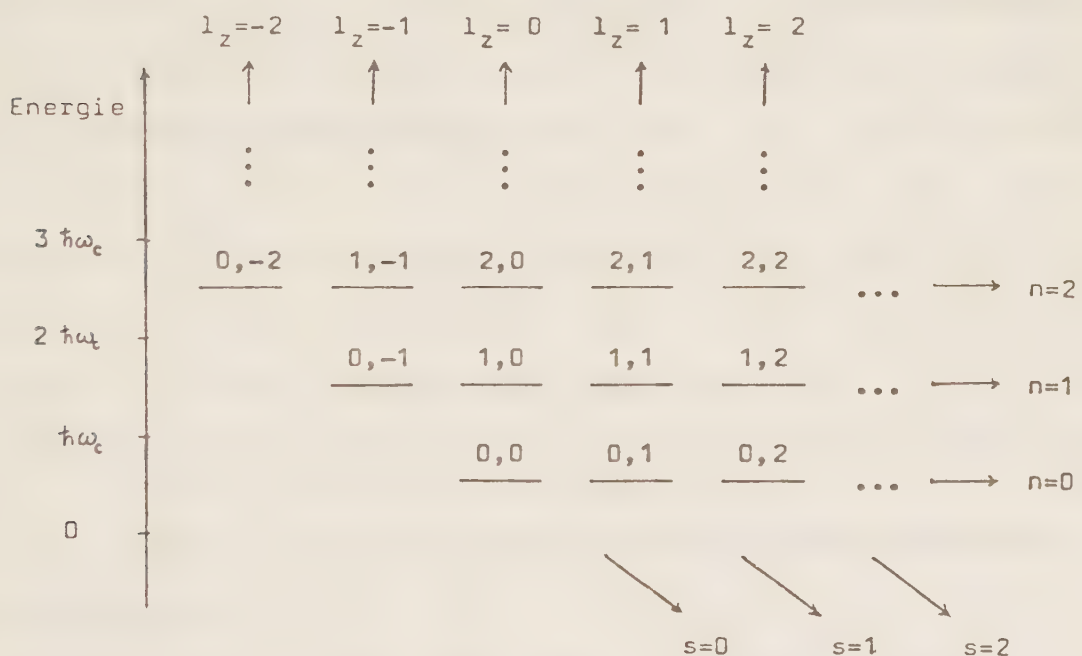


Abb. 4: Energieniveaus eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld. Die Terme sind beschriftet mit der Knotenzahl n_r der Radialwellenfunktion, und der z-Komponente des Drehimpulses, l_z . Am Rand sind die Landau-Quantenzahl n und die Quantenzahl s angegeben.

einem homogenen Magnetfeld läßt sich dann einfach schreiben

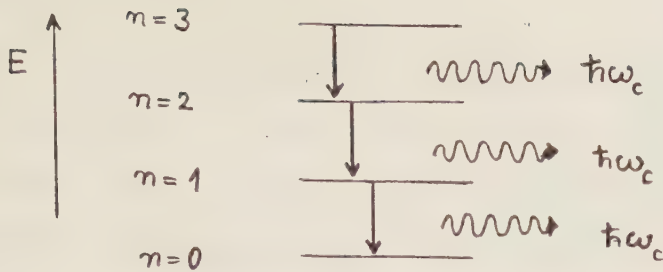
$$|n,s\rangle = (n! s!)^{-\frac{1}{2}} (a^\dagger)^n (b^\dagger)^s |0,0\rangle \quad (7)$$

Diese Zustände sind (in der gewählten Eichung) dieselben wie beim zweidimensionalen harmonischen Oszillator, nur haben sie andere Energien. Die z-Komponente des Drehimpulses ist $l_z = (n-s)\hbar$, und die Zahl der Knoten der Radialwellenfunktion ist $n_r = \min(n,s)$.

2.2. Zyklotron-Absorption und Emission

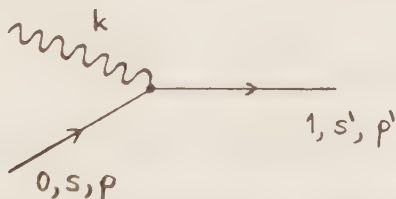
Bei der Gyrationbewegung erfährt jedes Elektron eine Beschleunigung senkrecht zum Magnetfeld. Nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik wird dabei eine elektromagnetische Welle abgestrahlt, deren Grundfrequenz mit der Frequenz der Gyrationbewegung übereinstimmt (siehe z.B. die Monographie von Sokolov und Ternov [1968]). Wenn die Geschwindigkeit des Elektrons klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit, ist der Anteil der Oberwellen gering und die Strahlung fast monochromatisch. Die senkrecht zum Magnetfeld abgestrahlte Welle ist linear polarisiert ($\vec{E}_{\text{Welle}} \perp \vec{B}$), und die in Feldrichtung abgestrahlte Welle zirkular polarisiert, wobei der E-Vektor der Welle in der gleichen Richtung kreist wie die Elektronen.

Quantenmechanisch betrachtet, geht das Elektron bei jedem Zyklotron- Emissionsprozeß in ein tieferes Landau-Niveau über. Bei nichtrelativistischen Elektronen sind die Matrixelemente für Übergänge mit $\Delta n > 1$ klein, so daß sie meist in kleinen Schritten ($\Delta n = 1$) zum Landau- Grundzustand zurückkehren:



Daß die Elektronen bevorzugt Photonen der Frequenz ω_c emittieren, bedeutet auch, daß sie solche Photonen sehr leicht absorbieren und dabei in höhere Landau-Niveaus befördert werden können. Die Monochromasie und Polarisation der Zyklotronstrahlung wird sich in einer starken Frequenz- und Polarisationsabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für Zyklotronabsorption ausdrücken. Dieser Wirkungsquerschnitt läßt sich sowohl klassisch (z.B. Landau, Lifschitz 1963, S. 219 ff.) als auch quantenmechanisch berechnen (z.B. Landau, Lifschitz 1971, S. 227 ff.).

Betrachten wir ein ruhendes Elektron im Landau-Grundzustand, das ein Photon mit dem Wellenvektor $\vec{k}$ absorbiert und dabei in das nächsthöhere Landau-Niveau übergeht.



Der Wellenvektor $\vec{k}$ bilde einen Winkel ϑ mit dem Magnetfeld $\vec{B}$. In der nichtrelativistischen Quantenmechanik wird die Kopplung der Welle mit einem Elektron (ohne Spin) beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H^1 = H_1 + H_2 = \frac{e}{2c} \left(\vec{v} \vec{A} + \vec{A} \vec{v} \right) + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 \quad (8)$$

Bezeichnet man mit $a_q^\dagger$ und a_q die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Photonen im Zustand q , so läßt sich der Operator des Vektorpotentials schreiben

$$\sum_q \left(\frac{2\pi \hbar c^2}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[a_q \vec{e}_q e^{i\vec{q}\vec{r}} + a_q^\dagger \vec{e}_q^* e^{-i\vec{q}\vec{r}} \right] \quad (9)$$

wobei L^3 das Normierungsvolumen ist. Die $\vec{e}_q$ sind Einheitsvektoren, die die Polarisation der einzelnen Moden angeben. Das Matrixelement für die Absorption des Photons im Zustand k ist dann ($\alpha = e^2/\hbar c$)

$$\langle f | H' | i \rangle = \left(\frac{2\pi \alpha \hbar^2 c}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \langle 1, s', p' | \vec{v} \vec{e} e^{i\vec{k}\vec{r}} + e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{v} \vec{e} | 0, s, p \rangle \quad (10)$$

Unter Benutzung der Dipolnäherung ($e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx 1$), sowie der Identität $\vec{v} \vec{e} = v_+ e_- + v_- e_+ + v_z e_z$ ergibt sich

$$\langle f | H' | i \rangle = \left(\frac{2\pi \alpha \hbar^2 c}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \langle 1, s', p' | v_+ e_- + v_- e_+ + v_z e_z | 0, s, p \rangle \quad (11)$$

Wie wir oben festgestellt haben, hebt nur der Operator v_+ das Elektron in das nächsthöhere Landau-Niveau. Die Quantenzahl s bleibt dabei unverändert. Deshalb

$$\langle 1, s', p' | v_+ e_- + v_- e_+ + v_z e_z | 0, s, p \rangle = (\hbar \omega_c / m)^{\frac{1}{2}} e_- \delta_{s's} \delta_{p'p} \quad (12)$$

Für die Absorptionsrate erhalten wir jetzt nach der "Goldenen Regel" (Feynman 1969)

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \\ &= \frac{4\pi^2 \alpha \hbar c}{\omega L^3} \frac{\hbar \omega_c}{m} |e_-|^2 \delta(\hbar \omega_c + p'^2/2m - \hbar \omega) , \end{aligned} \quad (13)$$

da wegen $p=p'$ und $s=s'$ die Summation über die (elektronischen) Endzustände entfällt. Division durch den einfallenden Photonenfluß liefert schließlich den Absorptionsquerschnitt

$$\sigma_c = 4\pi^2 \alpha \frac{\hbar}{m} |e_-|^2 \delta(\omega - \omega_c) \quad (14)$$

Das Auftreten des Faktors $|e_-|^2$ charakterisiert die starke Polarisationsabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts. Wesentlich ist nur die Komponente des Polarisationsvektors der einfallenden Welle, die sich im gleichen Sinn dreht wie die Elektronen. Wie wir am Schluß dieses Kapitels noch sehen werden, verschwindet diese Komponente bei $\omega = \omega_c$ für die ordentlichen Wellen in

einem kalten Plasma. Daher zeigen nur die außerordentlichen Wellen die Zyklotronresonanz. (Diese Feststellung gilt nur für ein kaltes Plasma. Bei genauerer Berechnung der Polarisationsmoden unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen zeigt sich, daß auch für die ordentlichen Wellen Zyklotron-Absorption möglich ist, allerdings mit wesentlich niedrigeren Wirkungsquerschnitten.)

Die $\mathcal{S}$ -Funktion in dem Wirkungsquerschnitt drückt aus, daß ein ruhendes Elektron nur Strahlung der Frequenz ω_c absorbieren kann. Ein bewegtes Elektron absorbiert bei der Doppler-verschobenen Frequenz $\omega_c (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$. Wenn die Elektronen eine (eindimensionale) Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung haben, ist die Frequenzabhängigkeit des Absorptionsquerschnitts von der Form

$$\exp - \left(\frac{\omega - \omega_c}{\Delta\omega} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_c} = \left(\frac{2kT}{mc^2} \right)^{\frac{1}{2}} |\cos \theta| \quad (15)$$

Außerhalb des Bereichs $\omega_c - \Delta\omega \dots \omega_c + \Delta\omega$ nimmt der Wirkungsquerschnitt sehr schnell ab. Dort bestimmen andere Prozesse, z.B. Thomson-Streuung, die mittlere freie Weglänge von Photonen. Um die genaue Linienform zu berechnen, muß man die relativistische Kinematik der Zyklotronabsorption (Daugherty und Ventura 1977) und die Frequenzabhängigkeit der Polarisationsmoden in einem heißen Quantenplasma berücksichtigen (Herold et al. 1981). Hier geht es uns nur um die allgemeine Struktur des Wirkungsquerschnitts für Zyklotron-Absorption. In den nächsten beiden Abschnitten werden wir ihn mit den - unter den gleichen vereinfachenden Annahmen berechneten - Wirkungsquerschnitten für Thomson-Streuung und frei-frei-Absorption vergleichen.

Der Zyklotron-Absorptionsquerschnitt ist verknüpft mit der Rate, mit der ein angeregtes Elektron in ein bestimmtes Frequenz-

und Raumwinkelintervall abstrahlt (Landau, Lifschitz 1971, S. 170):

$$w(\omega, \vartheta) d\omega d\Omega = \frac{\omega^2}{(2\pi)^3 c^2} \sigma(\omega, \vartheta) d\omega d\Omega, \quad (16)$$

also

$$w(\omega, \vartheta) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\hbar \omega^2}{m c^2} |e_-|^2 \delta(\omega - \omega_c). \quad (17)$$

Integration über alle Richtungen und Frequenzen, und Summation über die beiden Polarisationen liefert die Strahlungsbreite Γ_r , d.h. die inverse Lebensdauer des ersten angeregten Landau-Niveaus. Mit Hilfe der Beziehung $|e_-^{(1)}|^2 + |e_-^{(2)}|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \vartheta)$ (siehe Abschnitt 2.5) findet man

$$\Gamma_r = \frac{4}{3} \alpha \frac{\hbar \omega_c^2}{m c^2} \quad (18)$$

Die Lebensdauer ist also umgekehrt proportional zum Quadrat der Magnetfeldstärke. Für ein Feld von $5 \cdot 10^{12}$ G ergibt sich eine Lebensdauer von nur 10^{-17} sec.

2.3. Thomson-Streuung in einem stark magnetisierten Plasma

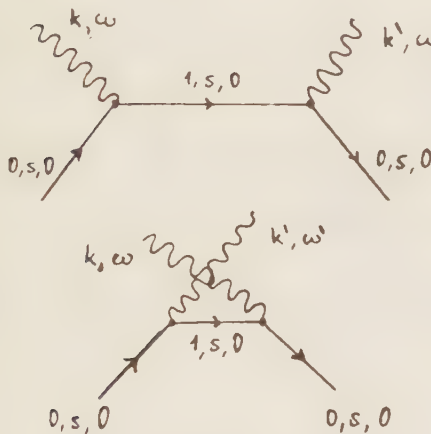
Die Wechselwirkungsprozesse von Photonen und Elektronen lassen sich nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten α ordnen. Nach der Zyklotron-Absorption als Prozeß erster Ordnung spielt die Streuung, ein Prozeß zweiter Ordnung, eine Rolle. Der Einfluß eines starken Magnetfelds auf die Thomson-Streuung ist bereits von einer Reihe von Autoren untersucht worden (Canuto, Lodenquai und Ruderman 1971, Gnedin und Sunyaev 1974b, Kanno und Hamada 1975, Ventura 1979, Herold 1979a, Pavlov et al. 1980a, Kirk und Mészáros 1980). Hier seien einige Ergebnisse kurz wiedergegeben.

Wir betrachten ein ruhendes Elektron im Landau-Grundzustand,

das nach dem Streuprozess wieder in den Grundzustand zurückkehrt. (Ausgeschlossen bleiben also "Raman"-Prozesse, bei denen sich die Frequenz des gestreuten Photons um ein Vielfaches von ω_c von der ursprünglichen Frequenz unterscheidet; siehe z.B. Gnedin und Sunyaev [1974b].) Die quantenmechanische Störungstheorie muß bis zur 2. Ordnung getrieben werden, d.h. zu berechnen ist das Matrixelement

$$\langle f | T | i \rangle = \sum_r \frac{\langle f | H_1 | r \rangle \langle r | H_1 | i \rangle}{E_i - E_r} + \langle f | H_2 | i \rangle \quad (19)$$

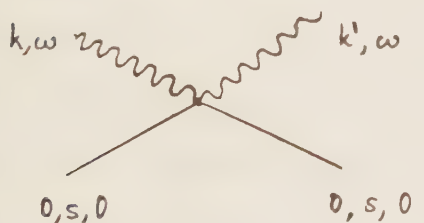
zwischen den Zuständen $|i\rangle = |0, s, 0\rangle_{\text{Elektron}} |k\rangle_{\text{Strahlung}}$ und $|f\rangle = |0, s', p'\rangle_{\text{Elektron}} |k'\rangle_{\text{Strahlung}}$. Wenn man wieder die Dipolnäherung macht, bleiben von der Summe nur die folgenden zwei Terme übrig:



$$\frac{2\pi\alpha\hbar^2c}{\omega L^3} \frac{(\hbar\omega_c/m)^{\frac{1}{2}} e_-^* (\hbar\omega_c/m)^{\frac{1}{2}} e_-}{\hbar\omega - \hbar\omega_c}$$

$$\frac{2\pi\alpha\hbar^2c}{\omega L^3} \frac{(\hbar\omega_c/m)^{\frac{1}{2}} e_+ (\hbar\omega_c/m)^{\frac{1}{2}} e_+^*}{\hbar\omega - (\hbar\omega_c + 2\hbar\omega)}$$

Der letzte Beitrag zu $\langle f | T | i \rangle$ - von dem Wechselwirkungsterm $\frac{e^2}{2mc^2} A^2$ - wird veranschaulicht durch das "Möwen-Diagramm" (Kirk und Mészáros 1980):



$$\frac{\alpha\hbar}{2mc} \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega L^3} 2(e_+^* e_+ + e_-^* e_- + e_z^* e_z)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die "normale" Thomson-Streuung (ohne Magnetfeld). Zusammengefaßt ergibt sich

$$\langle f | T | i \rangle = \frac{2\pi\alpha\hbar^2c}{m\omega L^3} \left(\frac{\omega}{\omega + \omega_c} e_+^* e_+ + \frac{\omega}{\omega - \omega_c} e_-^* e_- + e_z^* e_z \right) \quad (20)$$

und mit der Photon-Zustandsdichte $\rho = L^3\omega^2/(2\pi c)^3\hbar$ [erg⁻¹ster⁻¹]

die Streurate

$$\frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|T|i \rangle|^2 \rho = \alpha^2 \frac{\hbar^2}{m^2 c L^3} \left| \frac{\omega}{\omega + \omega_c} e_+^* e_+ + \frac{\omega}{\omega - \omega_c} e_-^* e_- + e_z^* e_z \right|^2 \quad (21)$$

Division durch den einfallenden Photonfluß c/L^3 liefert endlich den differentiellen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \left| \frac{\omega}{\omega + \omega_c} e_+^* e_+ + \frac{\omega}{\omega - \omega_c} e_-^* e_- + e_z^* e_z \right|^2 \quad (22)$$

(vgl. Ventura 1979). Schon an diesem Ausdruck ist abzulesen, daß die Zyklotron-Resonanz ($\omega \approx \omega_c$) sich auch in dem Streuquerschnitt bemerkbar macht. Außerdem steckt in den Polarisationsvektoren e , e' eine komplizierte Winkelabhängigkeit. Die Abhängigkeit vom Azimut φ' des gestreuten Photons hat die Form

$$e_{\pm}^* (\vartheta', \varphi') = e_{\pm}^* (\vartheta') \exp(\pm i\varphi'), \quad e_z^* (\vartheta', \varphi') = e_z^* (\vartheta') \quad (23)$$

(vgl. Abschnitt 5). Nach Mittelung über den Winkel φ' fallen deshalb gemischte Terme mit $e_+^* e_-$ usw. heraus:

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \alpha^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \left[\frac{\omega^2}{(\omega + \omega_c)^2} |e_+|^2 |e_+|^2 + \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_c)^2} |e_-|^2 |e_-|^2 + |e_z|^2 |e_z|^2 \right] \quad (24)$$

Mit Hilfe der Identitäten (Ventura 1979)

$$|e_{\pm}^1|^2 + |e_{\pm}^2|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad |e_z^1|^2 + |e_z^2|^2 = \sin^2 \vartheta \quad (25)$$

läßt sich der totale Streuquerschnitt berechnen:

$$\sigma = \sigma_T \left[\frac{\omega^2}{(\omega + \omega_c)^2} |e_+|^2 + \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_c)^2} |e_-|^2 + |e_z|^2 \right] \quad (26)$$

Hierbei ist $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \alpha^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ der klassische Thomson-Querschnitt. Bei tiefen Frequenzen ($\omega \ll \omega_c$) wird der Streuquerschnitt durch die feldparallele Komponente e_z des Polarisationsvektors bestimmt. Der physikalische Grund ist der, daß die Elektronen sich nur in z-Richtung frei bewegen können. Niederfrequenten Photonen erscheinen sie fest an eine Feldlinie gebunden. Für $\vartheta = 0^\circ$ ist wegen der Transversalität der Wellen $|e_z|^2 = 0$, daher ist der Streuquerschnitt für Photonen, die sich in

Feldrichtung bewegen, stark herabgesetzt. Bei niedrigen Frequenzen sind ferner die beiden Polarisationsmoden weitgehend linear polarisiert, und zwar liegt der E-Vektor der außerordentlichen Wellen senkrecht zum Feld. Daher ist ihr Streuquerschnitt auch bei großen Winkeln ($\vartheta \lesssim 90^\circ$) klein gegen den normalen Thomson-Querschnitt. Die Zeichnung 5 zeigt die Winkelabhängigkeit des Streuquerschnitts für ordentliche und außerordentliche Wellen bei zwei verschiedenen Frequenzen.

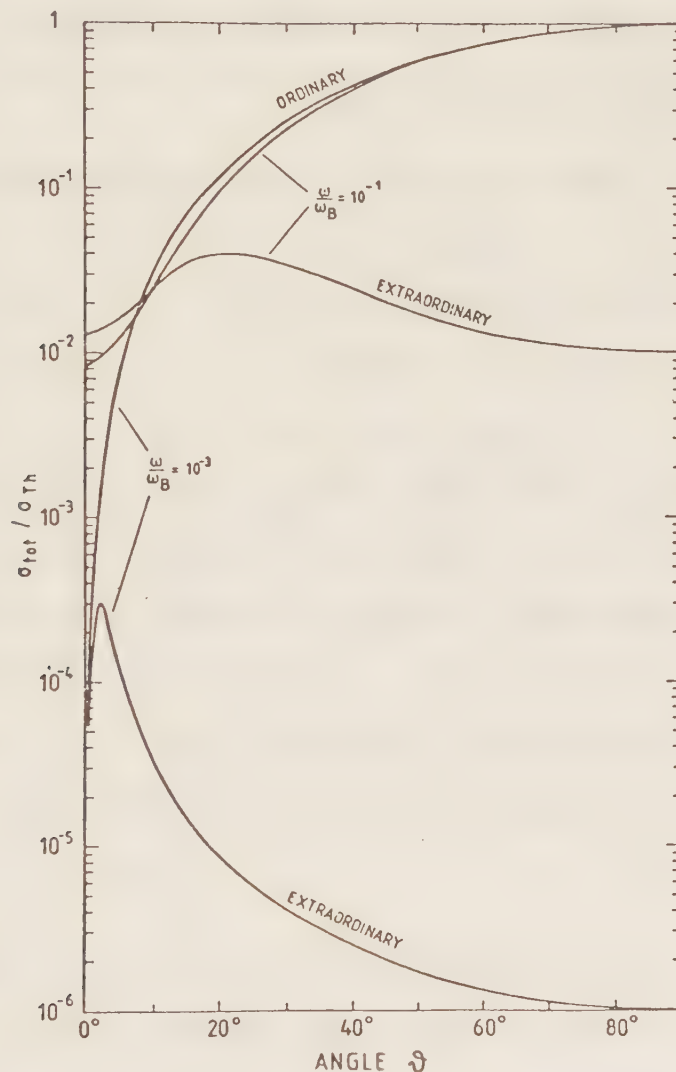


Abb. 5: Winkelabhängigkeit der Streuquerschnitte für ordentliche und außerordentliche Photonen in einem stark magnetisierten Plasma, bei Frequenzen von $1/10$ und $1/1000$ der Zyklotronfrequenz (Ventura 1979).

Bei hohen Frequenzen ($\omega \gg \omega_c$) verschwindet der Einfluß des Magnetfelds, und der Wirkungsquerschnitt geht gegen den Thomson-Wert ($|e_+|^2 + |e_-|^2 + |e_z|^2 = 1$). Von besonderer Bedeutung ist natürlich das Ansteigen des Streuquerschnitts bei $\omega \rightarrow \omega_c$. Die Divergenz des abgeleiteten Ausdrucks beweist, daß bei der Zyklotronfrequenz die Störungstheorie nicht mehr anwendbar ist. Man hat es mit Resonanzstreuung zu tun, und die endliche Lebensdauer des Zwischenzustands (Elektron im ersten angeregten Landau-Niveau) zu berücksichtigen (siehe z.B. Dirac 1958). In der Nähe der Resonanz hat der Wirkungsquerschnitt dann die Form

$$\sigma_{\text{res}} = \sigma_T \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_c)^2 + \Gamma_r^2/4} |e_-|^2 \quad (27)$$

was sich mit $\sigma_T \omega^2 = 2\pi\alpha \frac{\hbar}{m} \Gamma_r$ umformen läßt zu

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{res}} &= 4\pi^2\alpha \frac{\hbar}{m} \frac{\Gamma_r/2\pi}{(\omega - \omega_c)^2 + \Gamma_r^2/4} |e_-|^2 \\ &\rightarrow 4\pi^2\alpha \frac{\hbar}{m} |e_-|^2 \delta(\omega - \omega_c) \quad \text{für } \Gamma_r \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Es ist kein Zufall, daß sich hier wieder der Querschnitt für Zyklotron-"Absorption" ergibt (Ventura 1979). Da ein Elektron, das durch Absorption eines Photons in ein angeregtes Landau-Niveau gekommen ist, seine Energie innerhalb sehr kurzer Zeit ($\sim 10^{-17}$ sec) wieder abstrahlt, stellt der kombinierte Absorptions-/Emissionsprozeß nichts anderes als die Streuung eines Photons dar.

Nachdem sich so die Zyklotron-"Absorption" als Streuprozess entpuppt hat, stellt sich die Frage, durch welchen Prozeß Photonen wirklich absorbiert werden. Oder umgekehrt: auf welche Weise werden die Photonen erzeugt, die dann gestreut werden? In die Strahlungstransportgleichungen gehen Absorptions- und Streuquerschnitte in ganz unterschiedlicher Weise ein. Um den Absorptionskoeffizienten zu berechnen, müssen wir uns daher jetzt

noch mit einem dritten Strahlungsprozeß beschäftigen.

2.4. Frei-frei Absorption in einem stark magnetisierten Plasma

Eine Möglichkeit für ein angeregtes Elektron, strahlungslos in den Grundzustand zurückzukehren, ist Stoßabregung. Die Anregungsenergie wird dabei in kinetische Energie des stoßenden Teilchens umgewandelt. Die Absorption von Photonen bei Stößen zwischen geladenen Teilchen wird frei-frei-Absorption genannt, sie ist ein Prozeß dritter Ordnung in der Feinstrukturkonstanten. Der inverse Prozeß wird auch als Bremsstrahlung bezeichnet.

Da das Magnetfeld eine freie Bewegung der Protonen und Elektronen nur in einer Dimension zuläßt, gibt es wesentliche Unterschiede zwischen Stoßvorgängen in einem magnetfeldfreien und einem stark magnetisierten Plasma (Ventura 1973, Pavlov und Yakovlev 1976). Die frei-frei Absorption von Photonen unter den Bedingungen eines starken Magnetfelds wurde u.a. von Virtamo und Jauho (1975), sowie Pavlov und Panov (1976) untersucht. Im Einklang mit unseren Ausführungen über Zyklotron-Absorption und Thomson-Streuung geben wir hier eine kurze Herleitung einer vereinfachten Form des Wirkungsquerschnitts für frei-frei Absorption. Dabei folgen wir im wesentlichen der Darstellung von Virtamo und Jauho (1975).

Wir betrachten einen einzelnen Stoß zwischen einem Elektron und einem Atomkern der Ladung Ze . Der Atomkern befindet sich in Ruhe (am Koordinaten-Ursprung), während das Elektron vor dem Stoß in einem Landau-Grundzustand ist und sich mit der Geschwindigkeit $p/m \ll c$ in z -Richtung bewegt. Den Stoß mit dem Kern behandeln wir störungstheoretisch (Bornsche Näherung), wie

die Absorption des Photons. Zu berechnen ist also nach Fermi's Goldener Regel die Übergangsrate

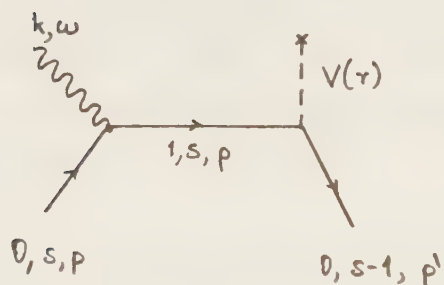
$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | T | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (29)$$

mit dem Matrixelement

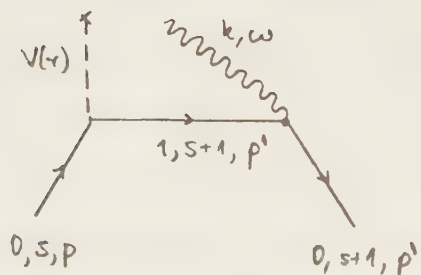
$$\langle f | T | i \rangle = \sum_r \frac{\langle f | V | r \rangle \langle r | H_1 | i \rangle}{E_i - E_r} + \frac{\langle f | H_1 | r \rangle \langle r | V | i \rangle}{E_i - E_r} \quad (30)$$

wobei $V = Ze^2/r$ und $H_1 = \frac{e}{2c} (\vec{v} \vec{A} + \vec{A} \vec{v})$.

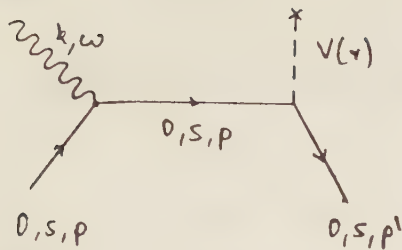
Glücklicherweise läßt sich die Zahl der Zwischenzustände, über die summiert werden muß, beträchtlich reduzieren. Da das Potential V rotationssymmetrisch ist, verbindet es nur Zustände mit gleichem Drehimpuls $l_z = n - s$, d.h. es gilt $\Delta n = \Delta s$. Bei der Absorption des Photons kann - wenn wir wieder die Dipolnäherung machen - die Landau-Quantenzahl sich nur um $\Delta n = 0, \pm 1$ ändern. Schließlich beschränken wir uns bei den möglichen Endzuständen auf den Fall $n' = 0$. Ein angeregtes Elektron würde unweigerlich wieder ein Photon emittieren, und das Ergebnis unserer Rechnung wäre eine Korrektur zum Streuquerschnitt. Nach diesen Einschränkungen bleiben von den möglichen Matrixelementen noch die folgenden vier Terme:



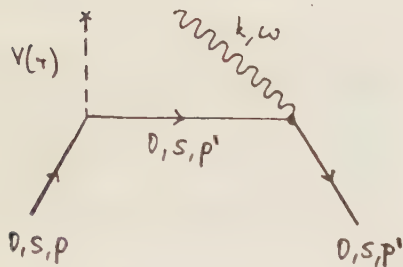
$$\frac{\langle 0, s-1, p' | V | 1, s, p \rangle \left(\frac{2\pi\alpha\hbar^2 c}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar\omega_c}{m} \right)^{\frac{1}{2}} e_-}{\left(\hbar\omega + \frac{p^2}{2m} \right) - \left(\hbar\omega_c + \frac{p^2}{2m} \right)}$$



$$\frac{\left(\frac{2\pi\alpha\hbar^2 c}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar\omega_c}{m} \right)^{\frac{1}{2}} e_+ \langle 1, s+1, p' | V | 0, s, p \rangle}{\left(\hbar\omega + \frac{p^2}{2m} \right) - \left(\hbar\omega + \hbar\omega_c + \frac{p'^2}{2m} \right)}$$



$$\frac{\langle 0, s, p' | V | 0, s, p \rangle \left(\frac{2\pi\alpha\hbar^2 c}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p}{m} e_z}{\left(\hbar\omega + \frac{p^2}{2m} \right) - \frac{p^2}{2m}}$$



$$\frac{\left(\frac{2\pi\alpha\hbar^2 c}{\omega L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p'}{m} e_z \langle 0, s, p' | V | 0, s, p \rangle}{\left(\hbar\omega + \frac{p^2}{2m} \right) - \left(\hbar\omega + \frac{p'^2}{2m} \right)}$$

Nur die letzten beiden Terme interferieren miteinander, da sie zum selben Endzustand führen. Energie-Erhaltung erlaubt es, die Energie-Nenner zu vereinfachen: $p'^2/2m - p^2/2m = \hbar\omega$. Somit erhält man für die Übergangsrate von $|i\rangle = |0, s, p\rangle$ nach $|f\rangle = |0, s, p'\rangle$:

$$w_{fi} = \frac{4\pi^2\alpha c}{\hbar\omega L^3} \left[\begin{aligned} & \frac{|e_+|^2}{(\omega + \omega_c)^2} \frac{\hbar\omega_c}{m} |\langle 1, s+1, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 \delta_{s', s+1} \\ & + \frac{|e_-|^2}{(\omega - \omega_c)^2} \frac{\hbar\omega_c}{m} |\langle 0, s-1, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 \delta_{s', s-1} \\ & + \frac{|e_z|^2}{\omega^2} \left(\frac{p-p'}{m} \right)^2 |\langle 0, s, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 \delta_{s', s} \end{aligned} \right] \delta(E_i - E_f) \quad (31)$$

Die Summation über die Quantenzahl s' der Endzustände liefert drei Terme, $s' = s-1, s, s+1$. Für den Impuls p' sind zwei Werte erlaubt, $p' = \pm \sqrt{p^2 + 2m\hbar\omega}$, wobei die Integration über die δ -Funktion jeweils zu dem Faktor $\frac{L}{2\pi} \frac{m}{\hbar|p'|}$ führt (Zustandsdichte). Die gesamte Übergangsrate $w_i = \sum_f w_{fi}$ vom Zustand $|i\rangle$ ist dann

$$w_{fi} = \frac{2\pi\alpha c}{\hbar\omega L^3} \frac{\omega_c}{|p'|} \left[\begin{aligned} & \frac{|e_+|^2}{(\omega + \omega_c)^2} \sum_{\pm p'} |\langle 1, s+1, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 \\ & + \frac{|e_-|^2}{(\omega - \omega_c)^2} \sum_{\pm p'} |\langle 0, s-1, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 \\ & + \frac{|e_z|^2}{\omega^2} \sum_{\pm p'} |\langle 0, s, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 \end{aligned} \right] \quad (32)$$

Diese Rate ist noch über die Anfangszustände zu mitteln. Die

Mittelung über s wurde von Virtamo und Jauho (1975) durchgeführt. Sie fanden

$$\frac{1}{M} \sum_s |\langle 0, s, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 = \frac{Z^2 e^4}{M L^2} C_0(a) \quad (33)$$

$$\frac{1}{M} \sum_s |\langle 1, s+1, p' | V | 0, s, p \rangle|^2 = \frac{Z^2 e^4}{M L^2} C_1(a)$$

wobei $a = \frac{1}{2} \frac{(p-p')^2}{m \hbar \omega_c}$ ein Maß für den Impulsübertrag auf den Atomkern ist, $M = \frac{m \omega_c}{2\pi \hbar} L^2$ die Entartung der Landau-Niveaus angibt, und die Funktionen C_0 und C_1 sich durch Exponential-Integrale ausdrücken lassen (Abramowitz und Stegun 1965):

$$C_0(a) = \frac{1}{a} e^a E_2(a) = \frac{1}{a} - e^a E_1(a) \quad (34)$$

$$C_1(a) = e^a (E_1(a) - E_2(a)) = (1+a) e^a E_1(a) - 1$$

Schließlich ist noch über die Anfangsimpulse zu mitteln, wobei wir eine eindimensionale Maxwell-Verteilung annehmen,

$$f(p) = (2\pi m k_B T_{||})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{2m k_B T_{||}}} \quad (35)$$

Die berechnete Übergangsrate bezieht sich auf den Stoß eines Elektrons mit einem Ion in einem Kasten der Größe L^3 . Um den Wirkungsquerschnitt zu erhalten, ist mit der Zahl der Ionen, $n_i L^3$, zu multiplizieren und durch den Photonenfluß zu dividieren. Das Ergebnis läßt sich in der Form schreiben

$$\sigma_a = \sigma_0 \left[\frac{\omega^2}{(\omega + \omega_c)^2} |e_+|^2 g_{\perp} + \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_c)^2} |e_-|^2 g_{\perp} + |e_z|^2 g_{||} \right] \quad (36)$$

wobei σ_0 der Absorptionsquerschnitt (Karzas und Latter 1961) in einem nicht magnetischen Plasma ist (abgesehen von einem Faktor $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} g$):

$$\sigma_0 = 4\pi^2 Z^2 \alpha^3 \frac{\hbar^2 c^2}{m \omega^3} \frac{n_i}{p_T}, \quad p_T = (\pi m k_B T / 2)^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

und die dimensionslosen sogenannten Gaunt-Faktoren gegeben sind durch

$$g_{\perp}(\omega, T) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{p^2}{2m k_B T}} \frac{C_1(a_+) + C_1(a_-)}{\sqrt{p^2 + 2m \hbar \omega}}, \quad (38)$$

$$g_{\parallel}(\omega, T) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{p^2}{2m k_B T}} \frac{a_+ C_0(a_+) + a_- C_0(a_-)}{\sqrt{p^2 + 2m \hbar \omega}}, \quad a_{\pm} = \frac{(p \pm \sqrt{p^2 + 2m \hbar \omega})^2}{2m \hbar \omega}$$

Abb. 6 zeigt die Frequenzabhängigkeit der beiden Gaunt- Faktoren für verschiedene Werte des Parameters $k_B T / \hbar \omega$.

Die Ähnlichkeit der Formeln (26) und (36) für Streuung und frei-frei Absorption ist bemerkenswert. Auch der frei-frei Absorptionsquerschnitt zeigt eine starke Richtungs- und Polarisationsabhängigkeit, insbesondere eine starke Herabsetzung des Wirkungsquerschnitts bei niedrigen Frequenzen ($\omega \ll \omega_c$) für die außerordentliche Polarisation, und bei Ausbreitung entlang

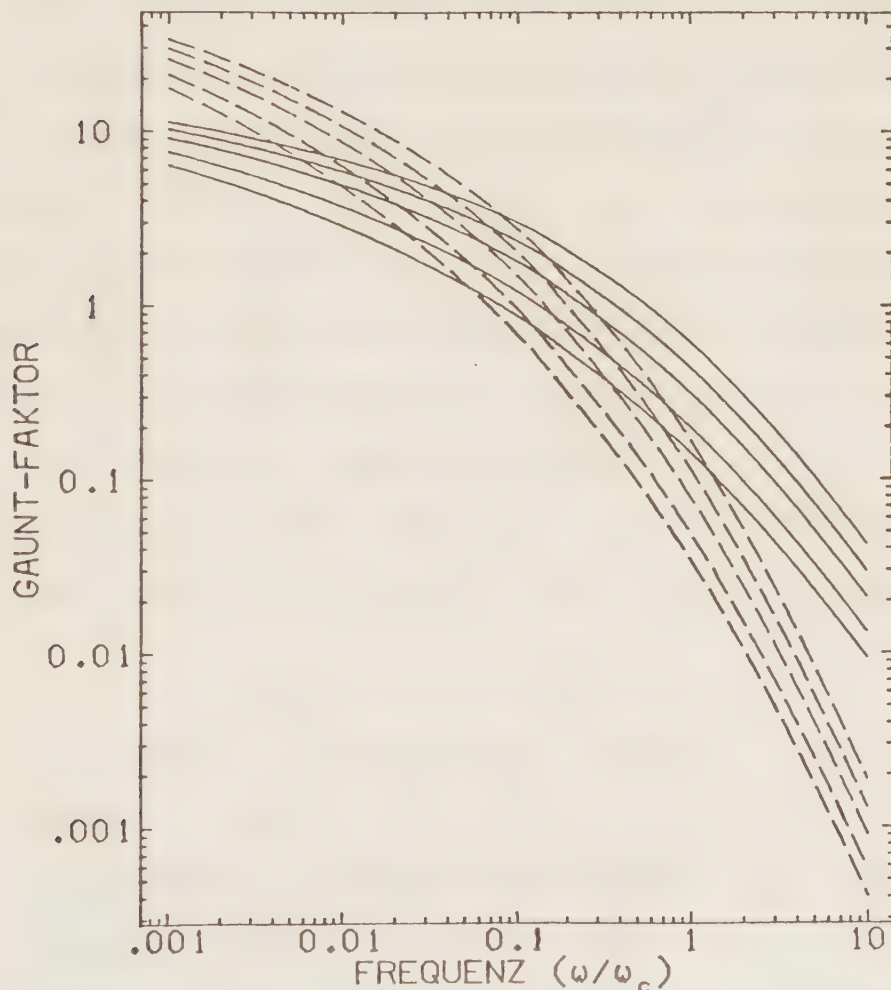


Abb. 6: Die Gaunt-Faktoren $g_{\parallel}$ (durchgezogen) und $g_{\perp}$ (gestrichelt) in Abhängigkeit von der Frequenz (ω / ω_c), für verschiedene Temperaturen, $kT / \hbar \omega_c = 0.01, 0.02, 0.04, 0.1, 0.2$ (von unten nach oben).

des Magnetfelds. Der Abnahme des Absorptionskoeffizienten bei hohen Frequenzen ($\sigma_0 \propto \omega^{-3}$) überlagert ist die Zyklotronresonanz. Bei $\omega \approx \omega_c$ versagt wieder die Störungstheorie, und man hat

$$\sigma_a \approx \sigma_0 \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_c)^2 + \Gamma^2/4} |e_-|^2 g_{\perp} \quad (39)$$

wobei $\Gamma = \Gamma_r + \Gamma_c$ sich aus der Strahlungs- und der Stoßbreite des ersten Landau-Niveaus zusammensetzt. Streu- und Absorptionsquerschnitte lassen sich in die Form bringen

$$\begin{aligned} \sigma_s &\approx 2\pi\alpha \frac{\hbar}{m} |e_-|^2 \frac{\Gamma_r}{(\omega - \omega_c)^2 + \Gamma^2/4} \\ \sigma_a &\approx 2\pi\alpha \frac{\hbar}{m} |e_-|^2 \frac{\Gamma_c}{(\omega - \omega_c)^2 + \Gamma^2/4} \end{aligned} \quad (40)$$

Durch Vergleich mit (18) findet man $\Gamma_c = 2\pi Z^2 \alpha^2 \hbar c^2 \frac{n_i}{p_T \omega_c} g_{\perp}(\omega_c)$, im Einklang mit der in Bornscher Näherung berechneten Rate für Stoßabregung des ersten Landau-Niveaus (Ventura 1973). Bei einem Wasserstoff-Plasma der Dichte $10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$ und Temperatur 10 keV ergibt sich $\Gamma_c = 8.8 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}$, die Stoßabregung erfolgt also viel langsamer als die Zyklotronemission. Dem entspricht die Tatsache, daß der Absorptionsquerschnitt für Photonen der Frequenz ω_c um Größenordnungen kleiner ist als der Streuquerschnitt. Abb. 7 zeigt die Frequenzabhängigkeit dieser Wirkungsquerschnitte für ordentliche und außerordentliche Photonen.

An der oben abgeleiteten Formel für den Absorptionsquerschnitt ist noch eine wichtige Korrektur anzubringen: der tatsächliche Wirkungsquerschnitt ist kleiner als der berechnete, weil eine durch das Plasma laufende Welle zwar durch Absorptionsprozesse gedämpft, aber gleichzeitig durch stimulierte Emission verstärkt wird. Wie stark sich diese Effekte kompensieren, hängt von der Verteilungsfunktion der

Elektronen ab. Wir haben angenommen, daß alle Elektronen im Landau-Grundzustand sind, mit einer Impulsverteilung $f(p) = (2\pi m k_B T_\perp)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{p^2}{2m k_B T_\perp})$. Da bei Absorption die elektronischen Endzustände $|0, s, p'\rangle$ um $e^{-\frac{p'^2 - p^2}{2m k_B T_\parallel}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T_\parallel}}$ schwächer besetzt sind als die Anfangszustände, $|0, s, p\rangle$, ist stimulierte Emission um denselben Faktor weniger häufig als Absorption. Der Netto-Absorptionsquerschnitt σ_a' (Chandrasekhar

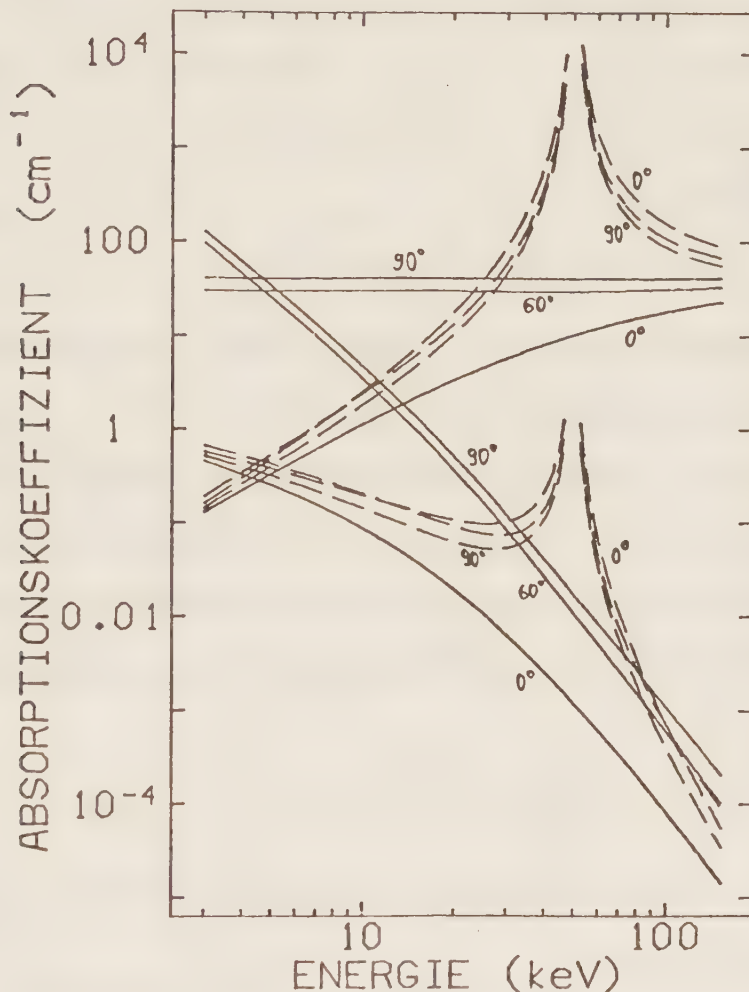


Abb. 7: Absorptions- und Streukoeffizienten in einem stark magnetisierten Plasma ($\hbar\omega_0 = 50$ keV, $kT = 10$ keV), in den Ausbreitungsrichtungen $\vartheta = 0^\circ, 60^\circ$ und 90° , für ordentliche (durchgezogen) und außerordentliche Photonen (gestrichelt). Um die Absorptionskoeffizienten zusammen mit den Streukoeffizienten auf einer relativ kurzen Skala darstellen zu können, wurde eine hohe Dichte (100 g cm^{-3}) angenommen.

1957, S.206f.) ergibt sich daher durch Multiplikation mit dem Faktor $(1 - e^{-\hbar\omega/kT_{\parallel}})$:

$$\sigma'_a = \sigma_a \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT_{\parallel}}}\right) \quad (41)$$

(Dieser Faktor wurde in Abb. 7 bereits berücksichtigt.)

Während stimulierte Emission durch eine einfache Korrektur des Absorptionskoeffizienten berücksichtigt wird, müssen wir die Rate für spontane Emission noch berechnen. Die Rate, mit der ein Elektron im Zustand $|f\rangle = |0, s, p\rangle$ spontan emittiert (und dabei in den Zustand $|i\rangle = |0, s, p\rangle$ übergeht), ist verknüpft mit dem Absorptionsquerschnitt beim Übergang $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ (Landau, Lifschitz 1971, S.170)

$$w_{f \rightarrow i}(\omega, \vartheta) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^3 c^2} \sigma_{i \rightarrow f}(\omega, \vartheta) \quad (42)$$

Uns interessieren die über die elektronischen Zustände gemittelten Querschnitte bzw. Raten, d.h. $\sigma = \sum_{i,f} p_i \sigma_{i \rightarrow f}$ und $w = \sum_{i,f} p_i w_{f \rightarrow i}$, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit ist, ein Elektron im Zustand i zu finden. Da bei allen Übergängen, die wir hier betrachten, die Besetzungswahrscheinlichkeit der Zustände f um einen Faktor $e^{-\frac{p_i^2 - p_f^2}{2m k_B T_{\parallel}}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T_{\parallel}}}$ geringer ist als die der Zustände i , gilt

$$w(\omega, \vartheta) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^3 c^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T_{\parallel}}} \sigma(\omega, \vartheta) \quad (43)$$

Der für stimulierte Emission korrigierte Absorptionsquerschnitt erfüllt die Beziehung

$$w(\omega, \vartheta) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^3 c^2} \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T_{\parallel}}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T_{\parallel}}}} \sigma'(\omega, \vartheta) \quad (44)$$

Formal ist dies das Kirchhoffsche Gesetz, $w(\omega, \vartheta) = B_{\omega} \sigma'(\omega, \vartheta)$, wobei B_{ω} die Planck-Funktion ist (Bekefi 1966, Kap.2)

$$B_{\omega}(T) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^3 c^2} \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)^{-1} \quad (45)$$

[Photonen pro Flächen-, Zeit-, Kreisfrequenz-, Raumwinkeleinheit

und Polarisation]. Es ist aber zu beachten, daß wir hier kein thermisches Gleichgewicht vorausgesetzt haben. Während die Geschwindigkeitsverteilung in Feldrichtung durch eine Temperatur $T_{\parallel}$ gekennzeichnet ist, haben wir für die Besetzung der Landau-Niveaus nicht

$$p_n = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_c}{k_B T_{\perp}}} \right) e^{-\frac{n\hbar\omega_c}{k_B T_{\perp}}} \quad (46)$$

mit $T_{\perp}=T_{\parallel}$ angenommen, sondern $p_n = \delta_{n0}$, d.h. $T_{\perp}=0$. Der Grund für die dem Kirchhoffschen Gesetz analoge Beziehung (44) ist der, daß Anfangs- und Endzustände der betrachteten Übergänge im gleichen Landau-Niveau ($n=0$) liegen. Hätten wir bei der Berechnung des Absorptionskoeffizienten Endzustände mit $n' > 0$ berücksichtigt, würde die Beziehung (44) nicht gelten. Sie ergäbe eine zu hohe Rate für den inversen (Emissions-) Prozeß, da die Anfangszustände mit $n' > 0$ bei der gemachten Annahme $T_{\perp}=0$ nicht besetzt sind. Die Absorptionsquerschnitte, die in einer Strahlungstransportrechnung zu benutzen sind, hängen natürlich von der Besetzung der Landau-Niveaus ab. Im nächsten Kapitel werden wir die Frage näher untersuchen, unter welchen Bedingungen die Verwendung der für $T_{\perp}=0$ berechneten Wirkungsquerschnitte sinnvoll ist.

2.5. Die Polarisationsmoden in einem kalten Plasma

Wie wir gesehen haben, sind die Wirkungsquerschnitte stark von der Polarisation abhängig. Andererseits erfährt eine durch das Plasma laufende Welle eine Drehung der Polarisationsrichtung (Faraday-Effekt). Wie kann man die Komplikation vermeiden, daß sich während des Fluges eines Photons mit dessen Polarisation auch die Wirkungsquerschnitte ändern? Die Antwort auf diese Frage ist schon lange bekannt (z.B. Born 1932): für eine gegebene

Ausbreitungsrichtung und Frequenz gibt es zwei Polarisationsmoden, d.h. Wellen, die ihre Polarisation beim Durchgang durch das Medium beibehalten. Jede andere Welle kann man als Überlagerung dieser beiden Moden darstellen, die man gewöhnlich als ordentliche und außerordentliche Wellen bezeichnet. Es ist vorteilhaft, alle Wirkungsquerschnitte auf diese beiden Polarisationsmoden zu beziehen. Hier ist deshalb nachzutragen, wie die in den Formeln für die Wirkungsquerschnitte auftretenden Größen e_+ , e_- , e_z zu berechnen sind. Dabei wollen wir die Polarisationsmoden eines kalten Plasmas im Gegensatz zu der üblichen Darstellung (z.B. Ginzburg 1970) aus einem mikroskopischen Bild herleiten. Eine ähnliche Ableitung wurde von Herold (1979b) gegeben, siehe auch Herold et al. (1981).

Die notwendige Vorarbeit haben wir bereits bei der Diskussion der Thomson-Streuung geleistet. Während die in Richtungen $\vartheta' \neq \vartheta$ laufenden Streuwellen keine feste Phasenbeziehung zur einfallenden Welle haben, überlagern sich die in Vorwärtsrichtung ($\vartheta' = \vartheta$, $\varphi' = \varphi$) gestreuten Wellen der einfallenden Welle kohärent. Dies führt zu einer Änderung der Phasengeschwindigkeit der Welle, d.h. zu einem von 1 verschiedenen Brechungsindex des Mediums (Feynman 1963). Die Beziehung (Sakurai 1967)

$$n(\omega, \vartheta) = 1 + 2\pi N \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 f(\omega, \vartheta) \quad (47)$$

verknüpft den Brechungsindex mit der Vorwärts-Streuamplitude $f(\omega, \vartheta)$, dabei ist N die Teilchendichte. Im allgemeinen sind f und n komplex; der Imaginärteil beschreibt die Dämpfung der Welle. Der Extinktionskoeffizient (die "Opazität") des Mediums ergibt sich aus

$$\kappa = 2 \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} n = 4\pi N \frac{c}{\omega} \operatorname{Im} f \quad (48)$$

(Optisches Theorem).

Wenn die Streuung polarisationsabhängig ist, hat man die komplexe Zahl f durch eine 2×2 -Matrix F zu ersetzen. Die beiden Polarisationsmoden ergeben sich dann einfach als Eigenvektoren dieser Matrix. Das Element $F_{ab} = \langle a | F | b \rangle$ beschreibt die Amplitude der a -polarisierten Streuwelle bei einer b -polarisierten einfallenden Welle. Als Basispolarisationen können zwei beliebige transversale Wellen dienen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \langle a | &= (-\cos \vartheta \cos \varphi, -\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)_{x,y,z} \\ \langle b | &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)_{x,y,z} \end{aligned} \quad (49)$$

Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß das B-Feld in z -Richtung liegt und die Welle sich in Richtung

$$\vec{k} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)_{x,y,z} \quad (50)$$

ausbreitet. In rotierenden Koordinaten, $e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm i e_y)$, haben die Basiszustände die Form

$$\begin{aligned} \langle a | &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi}, \sin \vartheta \right)_{+, -, z} \\ \langle b | &= \left(\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, 0 \right)_{+, -, z} \end{aligned} \quad (51)$$

In diesen Koordinaten haben wir im Abschnitt 3 die Streuamplitude bereits berechnet (Gleichung [20]):

$$\langle j' | F | j \rangle = -r_0 \left(\frac{\omega}{\omega + \omega_c} e_+^* e_+ + \frac{\omega}{\omega - \omega_c} e_-^* e_- + e_z^* e_z \right) \quad (52)$$

Wenn wir zur dimensionslosen Streuamplitude $\pi = -F/r_0$ übergehen und aus (52) ablesen

$$\pi_{\pm} = \frac{\omega}{\omega \pm \omega_c}, \quad \pi_z = 1 \quad (53)$$

erhalten wir nach Einsetzen der gewählten Basiszustände

$$\langle a | \Pi | a \rangle = \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta (\pi_+ + \pi_-) + \sin^2 \vartheta \pi_z$$

$$\langle a | \Pi | b \rangle = -\langle b | \Pi | a \rangle = -\frac{i}{2} \cos \vartheta (\pi_+ - \pi_-) \quad (54)$$

$$\langle b | \Pi | b \rangle = \frac{1}{2} (\pi_+ + \pi_-)$$

Mit dem Parameter

$$\xi = \tan 2\psi = \frac{2i \langle a | \Pi | b \rangle}{\langle a | \Pi | a \rangle - \langle b | \Pi | b \rangle} = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\pi_+ - \pi_-}{2\pi_z - \pi_+ - \pi_-} \quad (55)$$

lassen sich die Eigenvektoren von Π in der Form schreiben

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \cos \psi |a\rangle + i \sin \psi |b\rangle \\ |x\rangle &= \sin \psi |a\rangle - i \cos \psi |b\rangle \end{aligned} \quad (56)$$

Für $\xi = 0$ ($\psi = 0^\circ$ oder 90°) sind die Moden linear polarisiert (wie die Basiszustände), für $\xi = \infty$ ($\psi = 45^\circ$ oder 135°) zirkular. Mit den für ein kaltes Plasma gültigen Ausdrücken (53) für die Streuamplituden $\pi_{+,-,z}$ ergibt sich

$$\xi = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\omega}{\omega_c} \quad (57)$$

Hieran ist abzulesen, daß bei $\vartheta \approx 90^\circ$ oder $\omega \ll \omega_c$ die Moden weitgehend linear polarisiert sind, bei $\vartheta \approx 0^\circ$ oder $\omega \gg \omega_c$ vorwiegend zirkular. Bei den speziellen Ausbreitungsrichtungen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ legt die Symmetrie die Polarisationsmoden fest: für $\vartheta = 0^\circ$ bei allen Frequenzen zirkuläre Polarisation (ordentliche Welle: Drehsinn entgegengesetzt zur Gyrationbewegung der Elektronen, außerordentliche Welle: umgekehrt), und für $\vartheta = 90^\circ$ lineare Polarisation (ordentliche Welle: parallel zum Magnetfeld, außerordentliche: senkrecht zum Feld). Wegen des "falschen" Drehsinns der ordentlichen Welle bleibt sie bei $\vartheta = 0^\circ$ von der Zyklotronresonanz unbeeinflusst, dasselbe gilt bei $\vartheta = 90^\circ$, weil die ordentliche Welle nur auf die feldparallele Bewegung der Elektronen wirkt.

In rotierenden Koordinaten erhält man für die Polarisationsvektoren explizit

$$\begin{aligned} \langle 0 | &= \left(\frac{-\cos \vartheta \cos \psi - \sin \psi}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \frac{-\cos \vartheta \cos \psi + \sin \psi}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \sin \vartheta \cos \psi \right)_{+, -, z} \\ \langle X | &= \left(\frac{-\cos \vartheta \sin \psi + \cos \psi}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \frac{-\cos \vartheta \sin \psi - \cos \psi}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \sin \vartheta \sin \psi \right)_{+, -, z} \end{aligned} \quad (58)$$

An der Zyklotronresonanz, $\omega = \omega_c$, gilt $\xi = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$, $\tan \psi = \cos \vartheta$, und damit

$$\begin{aligned} e_-^0 &= \frac{-\cos \vartheta \cos \psi + \sin \psi}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} = 0 \\ e_-^x &= \frac{-\cos \vartheta \sin \psi - \cos \psi}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}} e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (59)$$

Die ordentlichen Wellen nehmen also (im kalten Plasma) an der Zyklotronresonanz nicht teil, ihre Polarisationskomponente e_- ist bei ω_c für alle Richtungen Null.

An der Darstellung (58) sieht man auch

$$\begin{aligned} |e_+^0|^2 &= \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \cos^2 \psi + \cos \vartheta \cos \psi \sin \psi + \frac{1}{2} \sin^2 \psi \\ |e_+^x|^2 &= \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \sin^2 \psi - \cos \vartheta \cos \psi \sin \psi + \frac{1}{2} \cos^2 \psi \end{aligned} \quad (60)$$

und damit

$$|e_+^0|^2 + |e_+^x|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} \quad (61)$$

(vgl. Ventura 1979). Entsprechend findet man die anderen "Summenregeln", die wir bei der Berechnung des gesamten Streuquerschnitts schon benutzt haben:

$$\begin{aligned} |e_-^0|^2 + |e_-^x|^2 &= \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} \\ |e_z^0|^2 + |e_z^x|^2 &= \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (62)$$

Die Eigenwerte der Streuamplitude liefern uns die Brechungsindizes der beiden Moden, siehe Gleichung (47):

$$\begin{aligned} n_j &= 1 - 2\pi N \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 n_0 \langle j | \Pi | j \rangle \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega + \omega_c} |e_+^j|^2 + \frac{\omega}{\omega - \omega_c} |e_-^j|^2 + |e_z^j|^2 \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Bei niedrigen Frequenzen unterscheiden sich die beiden Indizes um

einen Betrag

$$|n_x - n_o| \approx 2\pi N \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \tau_o |e_z^o|^2 \approx \frac{3}{4} \frac{c^2}{\tau_o \omega^2} N \sigma^o \quad (64)$$

wobei σ^o der Streuquerschnitt für ordentliche Wellen ist. Nach dem Durchlaufen einer bestimmten Strecke, l_F (Bonazzola et al. 1979), beträgt der Gangunterschied zwischen beiden Wellen genau eine Wellenlänge, $2\pi c/\omega$ ($n_x \approx n_o \approx 1$),

$$l_F = \frac{2\pi c/\omega}{|n_x - n_o|} \approx \frac{1}{N \sigma^o} \frac{4\pi \gamma}{\omega} \quad (65)$$

wobei wir $\gamma = 2e^2 \omega^2 / 3mc^3$ gesetzt haben. Selbst im Röntgenbereich, $\hbar\omega \sim 10$ keV, ist der Faktor

$$\frac{4\pi \gamma}{\omega} = \frac{8\pi}{3} \alpha \frac{\hbar\omega}{mc^2} \sim 10^{-3} \quad (66)$$

sehr klein, die Phasenbeziehung zwischen ordentlichen und außerordentlichen Wellen geht also nach einer kurzen Strecke verloren - kurz im Vergleich zur freien Weglänge: "Faraday-Depolarisation" (Shibanov 1978).

Abschließend ist noch eine Bemerkung über die Strahlungsdämpfung angebracht. Sie führt zu kleinen Korrekturen an den Streuamplituden (Ventura 1979)

$$\Pi_{\pm} = \frac{\omega}{\omega \pm \omega_c + i\gamma} \quad , \quad \Pi_z = \frac{\omega}{\omega + i\gamma}$$

und damit auch an den Polarisationsmoden,

$$\xi = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\omega + i\gamma}{\omega_c}$$

Da der Parameter ξ komplex ist, sind die Polarisationsvektoren in der Form (56) nicht mehr orthogonal und normiert. Im nächsten Kapitel werden wir kurz die Probleme diskutieren, die sich aus der Nicht-Orthogonalität der Moden für die Transportgleichung ergeben.

3. STRAHLUNGSTRANSPORTTHEORIE

3.1. Die Transportgleichung

Grundlage der Strahlungstransporttheorie ist die Boltzmann-Gleichung, die wir hier in der Form schreiben (Canuto und Ventura 1977)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{\partial n}{\partial t}(k, r, t) + \frac{c \vec{k}}{\omega} \vec{\nabla} n(k, r, t) = & \quad (1) \\
 = \varepsilon(k, r, t) [1 + n(k, r, t)] & \quad \text{Emission} \\
 - \alpha(k, r, t) n(k, r, t) & \quad \text{Absorption} \\
 + \int d^3 k' \frac{d^3 \sigma}{dk^3}(k \leftarrow k', r, t) [1 + n(k, r, t)] n(k', r, t) & \\
 - \int d^3 k' \frac{d^3 \sigma}{dk^3}(k' \leftarrow k, r, t) [1 + n(k', r, t)] n(k, r, t) & \quad \left. \vphantom{\int d^3 k'} \right\} \text{Streuung}
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $n(k, r, t)$ die Zahl der Photonen im Quantenzustand k am Punkt r zur Zeit t . In den eckigen Klammern repräsentiert "1" die spontane, und "n" die stimulierte Emission. Die Gleichung enthält bereits die wichtige Vereinfachung, daß der Brechungsindex gleich 1 gesetzt wurde, d.h. die Photonen breiten sich geradlinig und in Richtung des Wellenvektors aus. (Für die Transportgleichung in einem dispersiven Medium siehe z.B. Harris [1965] oder Bekefi [1966].) Die Absorptions-, Emissions- und Streukoeffizienten sind von der Dichte ρ_i der Elektronen in den Anfangszuständen abhängig:

$$\begin{aligned}
 \alpha(k, r, t) &= \sum_{i, f} \rho_i(r, t) \sigma_{f \leftarrow i}^{abs}(k) \\
 \varepsilon(k, r, t) &= \sum_{i, f} \rho_i(r, t) \sigma_{i \leftarrow f}^{abs}(k) \\
 \frac{d^3 \sigma}{dk^3}(k, r, t) &= \sum_{i, f} \rho_i(r, t) \sigma_{f \leftarrow i}^{streu}(k \leftarrow k')
 \end{aligned} \quad (2)$$

In vielen Fällen gilt $\frac{d^3 \sigma}{dk^3}(k \leftarrow k') = \frac{d^3 \sigma}{dk^3}(k' \leftarrow k)$, z.B. wenn die Streuung kohärent ist und eine Gleichgewichtsverteilung der

Elektronen ($\rho_i = \rho(\varepsilon_i)$) angenommen werden kann. Dann heben sich die Terme $\frac{d^3\sigma}{dk^3}(k \leftarrow k') n(k) n(k')$ und $\frac{d^3\sigma}{dk^3}(k' \leftarrow k) n(k) n(k')$ heraus, und die Transportgleichung wird linear. Wenn wir ein stationäres Problem betrachten ($\frac{\partial n}{\partial t} = 0$) und $\alpha' = \alpha - \varepsilon$, $\sigma(k) = \int d^3k' \frac{d^3\sigma}{dk^3}(k' \leftarrow k)$ setzen, ergibt sich die einfachere Gleichung

$$\hat{k} \vec{\nabla} n(k, r) = \varepsilon(k, r) - \alpha'(k, r) n(k, r) + \int d^3k' \frac{d^3\sigma}{dk^3}(k \leftarrow k', r) n(k', r) - \sigma(k, r) n(k, r) \quad (3)$$

In der Strahlungstransporttheorie wird gewöhnlich nicht die Besetzungszahl $n(k)$ des Zustands mit der Wellenzahl k benutzt, sondern die Intensität $I = (h v^3 / c^2) n$ (Harris 1965). Mit $\vec{\Omega} = \hat{k}$ als Ausbreitungsrichtung und der Opazität $\kappa = \alpha + \sigma$ schreibt sich die Transportgleichung dann

$$\vec{\Omega} \vec{\nabla} I(v, \Omega) = -\kappa(v, \Omega, r) I(v, \Omega, r) + \alpha'(v, \Omega, r) B_v + \int dv' \int d\Omega' \frac{d^2\sigma}{dv d\Omega}(v, \Omega \leftarrow v', \Omega'; r) I(v', \Omega', r) \quad (4)$$

mit $B_v = \frac{h v^3}{c^2} \varepsilon / \alpha'$, was bei lokalem thermodynamischen Gleichgewicht mit der Planck-Funktion identisch ist.

"Intensität", Energiefluß pro Flächen-, Zeit-, Raumwinkel- und Frequenzeinheit, ist seinem Ursprung nach ein phänomenologischer Begriff. Er scheint im Widerspruch zu stehen mit der Unschärferelation, wonach ein Photon nicht gleichzeitig einen bestimmten Ort und einen bestimmten Impuls (Wellenvektor) haben kann. Diese begriffliche Schwierigkeit läßt sich vermeiden, wenn man statt der Intensität eine Korrelations- (Kohärenz-) Funktion einführt, deren Fourier-Transformierte unter bestimmten Bedingungen mit der Intensität übereinstimmt (Wigner 1932; Wolf 1976; Ishimaru 1978). Die Kohärenzfunktion genügt einer Wellengleichung, d.h. einer Gleichung, die invariant ist gegen Zeitumkehr ($t \rightarrow -t$), während die Boltzmann-Gleichung diese

Symmetrie nicht besitzt. Aus der Wellengleichung kann man daher nicht durch bloße mathematische Manipulationen eine Transportgleichung wie die Boltzmann-Gleichung "herleiten". Begründungen der Transportgleichung enthalten meist ein heuristisches Element, etwa die Annahme von "molekularem Chaos" (Huang 1964) oder die Annahme zufälliger Phasen (Pauli 1926, van Hove 1955). In der Tat ist die Transportgleichung nur gültig, wenn die Phasenkorrelation zwischen verschiedenen Streuwellen vernachlässigt werden kann. Ausgeschlossen sind also Beugungseffekte, wie z.B. die Laue-Beugung von Röntgenstrahlung an Kristallen, oder die Untersuchung von Objekten, deren Ausdehnung nicht groß gegenüber der Wellenlänge ist. Solange Elektronenkorrelationen über Abstände von etwa $1 \text{ \AA}$ (Wellenlänge) keine Rolle spielen, sollte die Transportgleichung die Ausbreitung von Röntgenstrahlung in der Akkretionssäule eines Neutronensterns richtig beschreiben.

Im folgenden betrachten wir Strahlungstransport in eindimensionalen, homogenen Medien: einer unendlich ausgedehnten Schicht (als Modell für einen "heißen Fleck" am Pol des Neutronensterns) oder einen unendlich langen Zylinder (als Modell für ein strahlendes Filament). Eindimensional ist die Geometrie in dem Sinne, daß das Strahlungsfeld nur von einer Ortskoordinate abhängt. Diese Ortskoordinate bezeichnen wir mit r , wobei r zwischen $-R$ und $+R$ variiert (im Fall einer Schicht mit der Dicke $2R$), und zwischen 0 und R im Fall eines Zylinders mit dem Radius R . Das Magnetfeld verlaufe senkrecht zur Schicht bzw. parallel zur Achse des Zylinders. Die Ausbreitungsrichtung beziehen wir immer auf die Richtung des Magnetfelds: ϑ sei der Winkel zwischen $\vec{B}$ und $\vec{k}$, und φ der dazugehörige Azimutwinkel (s. Abb. 8). So erhält die Transportgleichung die Form

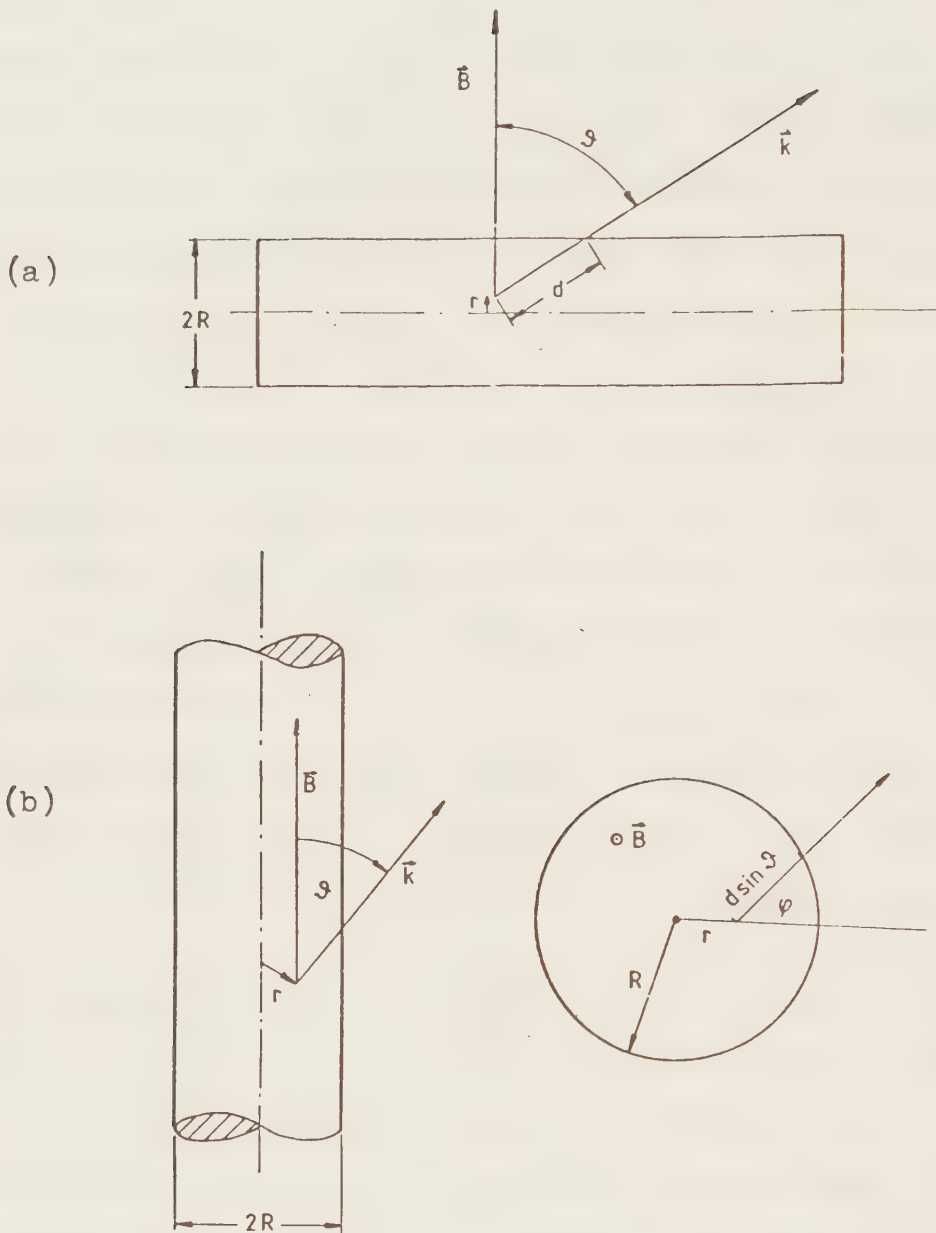


Abb. 8: Zwei verschiedene Geometrien werden in dieser Arbeit betrachtet:
 (a) eine Schicht senkrecht zum Magnetfeld, und
 (b) eine Säule parallel zum Magnetfeld.
 Ein Photon, das von einem Punkt r aus entweicht, muß eine Strecke d im Medium durchqueren. Der rechte Teil der Zeichnung b zeigt eine Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Säule.

$$\cos \vartheta \frac{\partial I}{\partial r} = \kappa (S - I) \quad (5)$$

für Schichtgeometrie, und

$$\sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial I}{\partial r} - \sin \vartheta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} = \kappa (S - I) \quad (6)$$

für Zylindergeometrie, wobei wir zur Abkürzung die Quellfunktion

$$\kappa S(\nu, \vartheta, \varphi) = \int d\nu' \int d\Omega' \frac{d^2\sigma}{d\nu d\Omega}(\nu, \vartheta, \varphi \leftarrow \nu', \vartheta', \varphi') \frac{\nu'}{\nu} I(\nu', \vartheta', \varphi') + \alpha(\nu, \vartheta) B_\nu \quad (7)$$

eingeführt haben.

Zur späteren Verwendung wollen wir hier noch eine nützliche Variante der Transportgleichung herleiten (Mihalas 1978, S.152).

Wir betrachten die Intensitäten in Auswärts- und Einwärtsrichtung,

$$I_+ = I(\nu, \vartheta, \varphi) \quad (8)$$

$$I_- = I(\nu, 180^\circ - \vartheta, 180^\circ + \varphi)$$

wobei $0^\circ < \vartheta < 90^\circ$ (Schicht) oder $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ (Zylinder). Addition und Subtraktion der Gleichungen für I_+ und I_- liefert zwei Gleichungen für $u = \frac{1}{2}(I_+ + I_-)$ und $v = \frac{1}{2}(I_+ - I_-)$:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{\partial v}{\partial r} &= \kappa \frac{1}{2} (S_+ + S_-) - \kappa u \\ \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial r} &= \kappa \frac{1}{2} (S_+ - S_-) - \kappa v \end{aligned} \quad (9)$$

für die Schicht, und

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial r} - \sin \vartheta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \kappa \frac{1}{2} (S_+ + S_-) - \kappa u \\ \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \sin \vartheta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \kappa \frac{1}{2} (S_+ - S_-) - \kappa v \end{aligned} \quad (10)$$

für den Zylinder. Bei einem ruhenden Plasma, mit den in Kapitel 2 abgeleiteten Wirkungsquerschnitten, sind Emission und Streuung in Auswärts- und Einwärtsrichtung gleich wahrscheinlich. Die Symmetrie der Quellfunktion, $S_+(\nu, \vartheta, \varphi) = S_-(\nu, 180^\circ - \vartheta, 180^\circ + \varphi)$, erlaubt es dann, mit Hilfe der zweiten Gleichung v aus der ersten

Gleichung zu eliminieren. Man erhält Differentialgleichungen 2. Ordnung (Diffusionsgleichungen):

$$\frac{\cos^2 \vartheta}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \kappa (u - S) \quad (\text{Schicht}) \quad (11a)$$

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{\kappa} \left[\cos^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \right] = \kappa (u - S) \quad (\text{Zylinder}) \quad (11b)$$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Symmetrie,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (12)$$

und aus der Ausstrahlungsbedingung $I_-(R)=0$, d.h. $u(R)-v(R)=0$:

$$u(R) + \frac{\cos \vartheta}{\kappa} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (\text{Schicht}) \quad (13)$$

$$u(R) + \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{\kappa} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} - \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\kappa r} \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{r=R} = 0 \quad (\text{Zylinder})$$

3.2. Die Behandlung der Polarisation

Teilweise polarisiertes Licht läßt sich bekanntlich durch eine Korrelationsmatrix (Dichtematrix) beschreiben (Landau, Lifschitz 1963, S.131):

$$\rho \propto \begin{pmatrix} \langle E_x E_x \rangle & \langle E_x E_y \rangle \\ \langle E_y E_x \rangle & \langle E_y E_y \rangle \end{pmatrix} \quad (14)$$

Eine mögliche Darstellung der Matrixelemente sind die Stokes-Parameter I, Q, U, V (Chandrasekhar 1960):

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \frac{1}{2} (I + Q) & \rho_{yy} &= \frac{1}{2} (I - Q) \\ \rho_{xy} &= \frac{1}{2} (U + iV) & \rho_{yx} &= \frac{1}{2} (U - iV) \end{aligned} \quad (15)$$

Die Transportgleichung vereinfacht sich, wenn man die Dichtematrix nicht in der x,y-Basis ausdrückt, sondern auf die Polarisationsmoden des Plasmas transformiert. Im letzten Kapitel hatten wir festgestellt, daß unter Bedingungen, wie sie in dem

akkretierten Plasma an der Neutronenstern- Oberfläche zu erwarten sind, zwischen zwei Streuprozessen viele Faraday- Drehungen erfolgen. Dadurch geht jede mögliche Korrelation zwischen der ordentlichen und der außerordentlichen Streuwelle verloren. Die auf die Polarisationsmoden transformierte Dichtematrix ist dann diagonal (Gnedin und Pavlov 1974), die Diagonalelemente beschreiben die Strahlungsintensitäten in den beiden Moden,

$$\rho_{11} = I_1, \quad \rho_{22} = I_2, \quad \rho_{12} \approx \rho_{21} \approx 0. \quad (16)$$

Es ist bemerkenswert, daß unter diesem Gesichtspunkt das Problem des Strahlungstransports in der Erdatmosphäre komplizierter ist (z.B. van de Hulst 1980). Denn die Moden sind entartet (haben gleiche Brechungsindizes), und damit bleiben Korrelationen zwischen den Polarisationen erhalten. Man muß also i.a. alle Matrixelemente berücksichtigen, wenn man die Polarisation des Himmelslichts berechnen will. - In dem hier vorliegenden Fall starker Faraday- Depolarisierung genügt es, statt der vier gekoppelten Gleichungen für die Stokes- Parameter nur zwei Gleichungen für die Moden- Intensitäten zu betrachten. Man kommt so zu der naheliegenden Verallgemeinerung der Transportgleichung

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} I_i(v, \Omega) = & -\kappa_i(v, \Omega, \tau) I_i(v, \Omega, \tau) + \alpha'_i(v, \Omega, \tau) B_v \\ & + \sum_{j=1,2} \int d\nu' \int d\Omega' \frac{d^2 \sigma_{ij}}{d\nu d\Omega}(v\Omega \leftarrow \nu'\Omega') \frac{\nu}{\nu'} I_j(\nu'\Omega') \end{aligned} \quad (17)$$

wobei $I_i/h\nu c$ die Dichte der Photonen (pro Hz und ster) der i-ten Polarisation angibt, κ_i und α'_i Opazität und Absorptionsquerschnitt für Polarisation i, und σ_{ij} den Streuquerschnitt von Polarisation j nach i darstellt. Eine genauere Begründung dieser Gleichung wurde von Gnedin und Pavlov (1974) gegeben. Der Schritt von der exakten Transportgleichung

3.

für die Matrix ρ zur näherungsweise gültigen Gleichung für die Diagonalelemente ρ_{ii} hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Schritt von der Gleichung für die Kohärenzfunktion zur Boltzmann-Gleichung für die Photonen- Besetzungszahlen.

Eine bei der Herleitung auftretende Schwierigkeit sei hier nicht verschwiegen: die Nicht-Orthogonalität der Polarisationsmoden. Weil das Skalarprodukt $\langle e_1 | e_2 \rangle$ nicht verschwindet, bleibt eine geringe Korrelation zwischen den Moden immer erhalten, die Faraday- Depolarisation kann also nicht vollständig sein. Man kann zwar erwarten, daß zwei Intensitäten - die Eigenwerte der Dichtematrix - zur Beschreibung des Strahlungsfeldes ausreichen. Da die Dichtematrix als hermitesche Matrix orthogonale Eigenvektoren besitzt, kann sie aber nicht in den Polarisationsmoden diagonal sein.

Dieses Problem macht sich natürlich auch bei der Lösung der Transportgleichung bemerkbar. Tief im Innern eines optisch dicken Plasmas liefert die vereinfachte Gleichung (17) $I_1 = I_2 = B$ (siehe unten). Wenn die Moden orthogonal sind, bedeutet das, daß die Strahlung unpolarisiert ist, wie im thermodynamischen Gleichgewicht zu erwarten. Unpolarisiertes Licht als Mischung zweier polarisierter Anteile darzustellen ist nur möglich, wenn diese zwei Anteile zueinander senkrecht polarisiert sind. Zwei nicht ganz orthogonale Moden muß man mit einer geringen "Antikorrelation" mischen, um unpolarisiertes Licht zu erhalten. Hieran zeigt sich erneut, daß die Dichtematrix ρ in den Polarisationsmoden nicht diagonal sein kann. Die Nichtdiagonalelemente sind bei einem kalten Plasma von der Größenordnung $\langle e_1 | e_2 \rangle \sim \frac{\gamma}{\omega} \sim 10^{-3}$, d.h. vernachlässigbar. Dies trifft bei einem heißen Plasma in der Nähe der Zyklotronresonanz

nicht mehr zu ($\langle e_1 | e_2 \rangle \sim 0.2$). Trotzdem werden wir bei allen Rechnungen die vereinfachte Transportgleichung (17) benutzen. Die Form der "richtigen" Gleichung für die vier Stokes-Parameter ist zwar bekannt (Chandrasekhar 1960, Zheleznyakov et al. 1974, Wilson 1980), die Gleichung ist aber schwieriger zu lösen.

3.3. Einige Grundbegriffe der Strahlungstransporttheorie

Streuprozesse ändern im allgemeinen Frequenz, Ausbreitungsrichtung und Polarisation der Photonen. Da die Wirkungsquerschnitte von diesen Parametern stark abhängen, ändert sich damit auch die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Photon weitere Streuungen erleidet. Das macht die Lösung der allgemeinen Transportgleichung schwierig. Sehr viel einfacher wird das Transportproblem, wenn man eine konstante mittlere freie Weglänge der Photonen voraussetzen kann. Diesen Fall wollen wir zuerst untersuchen.

Mit den bei der Herleitung des Streuquerschnitts gemachten Annahmen gilt bei der Streuung $\omega' = \omega$. Unter dieser Voraussetzung kann man das Transportproblem für jede Frequenz getrennt lösen. Außerdem machen wir die Annahme, daß nur Photonen einer Polarisation (z.B. außerordentliche Photonen) mit nennenswerter Wahrscheinlichkeit produziert werden, so daß wir nur eine Polarisation zu betrachten brauchen. Die Winkelabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte können wir schließlich unterdrücken, indem wir die Transportgleichung (11) über alle Richtungen mitteln: Diffusionsnäherung (Pomraning 1973). Auf diese Weise kommen wir (für die Schichtgeometrie) zu der einfachen Gleichung

3.

$$D'' \frac{d^2 n}{dr^2} = K n - S n - A \bar{n} = A (n - \bar{n}) \quad (18)$$

n bedeutet jetzt die Dichte der Photonen einer bestimmten Frequenz und Polarisation, $\bar{n} = \frac{4\pi}{h\nu c} B$ ist die Gleichgewichtsdichte, und die Koeffizienten D'' , K , S und A sind gegeben durch folgende Mittelwerte $[\langle \rangle := \int_0^1 d(\cos \vartheta)]$

$$D'' = \left\langle \frac{\cos^2 \vartheta}{\kappa(\vartheta)} \right\rangle \quad (19)$$

$$A = \langle \alpha(\vartheta) \rangle, \quad S = \langle \sigma(\vartheta) \rangle, \quad K = \langle \kappa(\vartheta) \rangle = A + S$$

Mittlung von $\cos \vartheta$ u + $\frac{\cos^2 \vartheta}{\kappa} \frac{d\kappa}{dr} = 0$ führt auf die Randbedingung

$$\frac{1}{2} n(R) + D'' \left. \frac{dn}{dr} \right|_{r=R} = 0, \quad (20)$$

und wenn wir eine symmetrische Schicht annehmen, erhalten wir die zusätzliche Bedingung $\left. \frac{dn}{dr} \right|_{r=R} = 0$. Gleichung (18) ist die einfachste Form einer Transportgleichung, ihre Lösung läßt sich schreiben

$$n(r) = \bar{n} \left[1 - f \frac{\cosh(r/\lambda)}{\cosh(R/\lambda)} \right] \quad (21)$$

mit

$$\lambda = (D/A)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$f = \left[1 + \frac{2D}{\lambda} \tanh \frac{R}{\lambda} \right]^{-1}$$

Der auf einer Seite der Schicht entweichende Photonenfluß ist

$$F = -c D \left. \frac{dn}{dr} \right|_{r=R} = \bar{n} c f \frac{D}{\lambda} \tanh \frac{R}{\lambda} \quad (23)$$

Für eine dünne Schicht ($R \ll \lambda$) ergibt sich

$F = \bar{n} c D R / \lambda^2 = \bar{n} c A R$, das ist genau die Hälfte der Photonen, die pro cm^2 Schicht und pro sec thermisch produziert werden. ($\bar{n} c A$ ist die Emissionsrate pro cm^3 und sec.) Mit wachsender Schichtdicke geht der Fluß gegen den Grenzwert

$$F = \bar{n} c \frac{D}{\lambda} \left/ \left(1 + \frac{2D}{\lambda} \right) \right. \quad (24)$$

Dieser Wert wird vor allem bestimmt durch den Parameter $\epsilon = A/K$,

die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Wechselwirkungsprozeß. ε ist meist klein, typisch etwa 10^{-6} . Der aus der Schicht entweichende Photonenfluß liegt dann weit unter dem eines Schwarzen Körpers, $F_{bb} = \bar{n}c/4$ (Felten und Rees 1972):

$$\frac{F}{F_{bb}} \approx \frac{4D}{\lambda} \sim \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon} \quad (25)$$

(Hierbei haben wir die Abschätzung $D \sim \langle \cos^2 \vartheta \rangle / \langle \chi \rangle = \frac{1}{3} / K$ benutzt.) Die Photonendichte erreicht in der Mitte der Schicht den Wert ($R \gg \lambda$)

$$n(0) = \bar{n} \left(1 - \frac{f}{2} e^{-\frac{R}{\lambda}} \right) \approx \bar{n} \quad (26)$$

wie im thermodynamischen Gleichgewicht zu erwarten. Zum Rand hin fällt die Photonendichte exponentiell ab:

$$n(r) = \bar{n} \left[1 - f e^{-(R-r)/\lambda} \right] \quad (27)$$

$$n(R) = \bar{n} (1-f) = \bar{n} \frac{2D/\lambda}{1+2D/\lambda} \sim \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon} \bar{n}$$

Daß der Photonenfluß bei wachsender Schichtdicke $2R$ einen Sättigungswert erreicht, liegt natürlich daran, daß Photonen, die tief im Innern produziert werden, nach zahlreichen Streuprozessen absorbiert werden, also nicht zum abgestrahlten Fluß beitragen. Die Wahrscheinlichkeit dafür läßt sich aus unserer Lösung für die Photonendichte direkt ablesen:

$$p_a(r) = n(r) / \bar{n} = 1 - f e^{-(R-r)/\lambda} \quad (28)$$

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in der Tiefe $t=R-r$ erzeugtes Photon entweicht (Sobolev 1963),

$$p_e(r) = f e^{-(R-r)/\lambda} = \frac{e^{-t/\lambda}}{1+2D/\lambda} \quad (29)$$

Da ein Photon entweder in Auswärts- oder in Einwärtsrichtung erzeugt wird, hat p_e an der Oberfläche ($t=0$) den Wert $p_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r$, wobei r die Reflektivität der Schicht angibt.

Somit ergibt sich

$$r = \frac{1-2D/\lambda}{1+2D/\lambda}, \quad a = \frac{4D/\lambda}{1+2D/\lambda} \quad (30)$$

für Reflektivität und Absorptivität einer dicken Schicht ($a=1-r$). Vergleich mit (24) bestätigt die Kirchhoffsche Beziehung $F=a F_{bb}$. Da die Streuung meist überwiegt ($\varepsilon \ll 1$), ist die Reflektivität hoch und die Absorptivität klein ($D/\lambda \sim \sqrt{\varepsilon} \ll 1$).

Wie aus Gleichung (29) hervorgeht, können Photonen nur aus einer oberflächennahen Schicht der Dicke λ entweichen. λ gibt an, wie weit Photonen diffundieren können, bevor sie absorbiert ("thermalisiert") werden. Daher wird λ oft auch als Thermalisierungslänge bezeichnet (Mihalas 1978, S.149). In dem soeben diskutierten Fall, daß die Photonen eine große Zahl ($N \sim \frac{1}{\varepsilon}$) von Schritten jeweils gleicher Schrittweite ($\sim D$) machen, läßt sich die Thermalisierungslänge sehr leicht abschätzen (Felten und Rees 1972)

$$\lambda \sim \sqrt{N} \cdot D \sim D/\sqrt{\varepsilon} \quad (31)$$

Im allgemeinen ist die Berechnung der Thermalisierungslänge jedoch schwierig, weil sich die Wirkungsquerschnitte für ein Photon und damit die Schrittweiten während des "random walk" sehr stark ändern können. Dies wird das Thema der nächsten Kapitel sein.

3.4. Absorption und Streuung

Wir haben gesehen, welche große Rolle das Verhältnis von Absorptions- zu Streukoeffizienten spielt. Da die Unterscheidung von Absorptions- und Streuprozessen so wichtig ist, müssen wir begründen, weshalb wir Zyklotronabsorption als Streuung und nur frei-frei Absorption als wahre Absorption behandeln.

Da die Wirkungsquerschnitte von der Besetzung der Landau-Niveaus abhängen, benötigt man eine zusätzliche kinetische

Gleichung für die Elektronen. Man müßte also zwei über die Wirkungsquerschnitte miteinander gekoppelte Transportgleichungen lösen. Wir beschränken uns hier auf den Fall $k_B T_{\parallel} \ll \hbar \omega_c$ und betrachten nur die Elektronendichten in den zwei niedrigsten Landau-Niveaus, $N_0(r)$ und $N_1(r)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_0}{\partial t} &= A N_1 + B n N_1 - B n N_0 + C_0 N_1 - C_1 N_0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} &= -A N_1 - B n N_1 + B n N_0 - C_0 N_1 + C_1 N_0\end{aligned}\quad (32)$$

A ist die Rate für spontane Emission, B der Einstein-Koeffizient für stimulierte Emission bzw. Absorption, und C_0 , C_1 sind die Raten für Stoßabregung bzw. -anregung. Die Dichte der Photonen in der Zyklotronlinie, n , sei beschrieben durch eine Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = c D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + q \quad (33)$$

mit dem Quellterm

$$q = N_1 A + (N_1 B - N_0 B) n \quad (34)$$

Wir suchen eine stationäre Lösung, $\frac{\partial N_0}{\partial t} = \frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} = 0$. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt dann

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{B n + C_1}{A + B n + C_0} \quad (35)$$

Stöße haben die Tendenz, die Verteilung auf die Landau-Niveaus (transversale Temperatur) der Geschwindigkeitsverteilung in z -Richtung (longitudinale Temperatur) anzugleichen.

$$\frac{N_1}{N_0} \rightarrow \frac{C_1}{C_0} = e^{-\hbar \omega_c / k_B T_{\parallel}} \quad (36)$$

Die Stoßraten sind i.a. viel kleiner als die Raten für Strahlungsanregung oder -abregung. Die Besetzung der Landau-Niveaus wird sich vor allem nach der lokalen Dichte der Zyklotron-Photonen einstellen

3.

$$\frac{N_1}{N_0} \rightarrow \frac{Bn}{A+Bn} \quad (37)$$

Nur im Innern einer dicken Schicht wird die Photonendichte den Gleichgewichtswert $\bar{n} = \frac{A}{B} (e^{\frac{\hbar\omega_c}{k_B T_{\parallel}}} - 1)^{-1}$ erreichen, d.h. nur dort wird auch die Besetzung der Landau-Niveaus durch die Temperatur $T_{\parallel}$ charakterisiert sein.

$$\frac{N_1}{N_0} \rightarrow \frac{B\bar{n}}{A+B\bar{n}} = e^{-\hbar\omega_c/k_B T_{\parallel}} \quad (38)$$

Zum Rand hin muß die Besetzungszahl im gleichen Maße abnehmen wie die Photonendichte n .

Für den Quellterm findet man mit Gleichung (35) und $N=N_0+N_1$

$$\begin{aligned} q &= N_1 (A+Bn) - N_0 Bn \\ &= N \frac{A C_1 + Bn C_1 - Bn C_0}{A + 2Bn + C_0 + C_1} \end{aligned} \quad (39)$$

Da wir $k_B T_{\parallel} \ll \hbar\omega_c$ angenommen haben, gilt $C_1 \ll C_0$, $Bn < B\bar{n} \ll A$, und man kann näherungsweise schreiben

$$q \approx N \frac{A}{A+C_0} C_1 - N \frac{C_0}{A+C_0} Bn \quad (40)$$

Die beiden Terme haben eine sehr anschauliche Erklärung: der erste ist die Rate für Stoßanregung, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, daß das angeregte Elektron strahlend in den Grundzustand zurückkehrt. Der zweite Term ist die Zahl der Absorptionsprozesse pro sec, multipliziert mit der (kleinen) Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron eine Stoßabregung erfährt. Sowohl die Erzeugung als auch die Vernichtung von Photonen geht also nur mit Hilfe von Stößen vonstatten. Das Verhältnis der Absorptions- zur Emissionsrate ist

$$\frac{Bn C_0}{A C_1} = n \frac{B}{A} e^{\hbar\omega_c/k_B T_{\parallel}} \approx n/\bar{n} \quad (41)$$

Die zeitunabhängige Diffusionsgleichung läßt sich damit in die Form bringen

$$0 = D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \alpha \bar{n} - \alpha n \quad (42)$$

wobei $\alpha = \frac{N}{c} B C_0 / (A + C_0)$ der Koeffizient für frei-frei-Absorption ist (an der Zyklotronresonanz), und erheblich kleiner ist als der Koeffizient für Zyklotronabsorption, $\frac{N}{c} B$. Weil wir $k_B T_{\parallel} \ll \hbar \omega_c$ angenommen haben, sind die Besetzungszahlen praktisch konstant ($N_0 \simeq N$, $N_1 \simeq 0$), und damit der Koeffizient α unabhängig von der Photonendichte. Im entgegengesetzten Fall wäre die Opazität stark von der lokalen Photonendichte abhängig, und die Berücksichtigung der stimulierten Streuung erforderlich (vgl. Melrose 1981).

4. DIE POLARISATIONSBÄHÄNGIGKEIT DER WIRKUNGSQUERSCHNITTE UND IHR EINFLUSS AUF DAS SPEKTRUM

4.1. Die Diffusionsgleichungen für ordentliche und außerordentliche Photonen

Im letzten Kapitel hatten wir den einfachsten Typ einer Transportgleichung diskutiert: die Diffusionsgleichung für eine Schicht,

$$D'' \frac{d^2 n}{dr^2} + A (\bar{n} - n) = 0, \quad (1)$$

mit der Diffusionskonstanten $D'' = \langle \cos^2 \vartheta / \kappa(\vartheta) \rangle$. Entsprechend gewinnt man durch Mittelung der Gleichung (3.11) eine Diffusionsgleichung für Zylindergeometrie:

$$D^\perp \left(\frac{d^2 n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} \right) + A (\bar{n} - n) = 0, \quad (2)$$

mit der Diffusionskonstanten $D^\perp = \langle \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta / \kappa(\vartheta) \rangle$ (vgl. Pavlov und Yakovlev 1977). Wenn die Koeffizienten konstant sind, führen diese Gleichungen auf Exponential- (Hyperbel-) Funktionen bzw. modifizierte Besselfunktionen und sind leicht zu lösen. Der Preis dafür ist die zu grobe Idealisierung, die wir bei der Herleitung vorgenommen haben. Wir hatten angenommen, daß Streuung die Frequenz und Polarisation eines Photons nicht ändert.

Glücklicherweise wird das Problem nur wenig schwieriger, wenn man die Streuung von einer Polarisation in die andere berücksichtigt. Statt zweier getrennter Diffusionsgleichungen für die zwei Arten von Photonen hat man dann zwei gekoppelte Gleichungen

$$D_1 \left(\frac{d^2 n_1}{dr^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{dn_1}{dr} \right) - K_1 n_1 + S_{11} n_1 + S_{12} n_2 + A_1 \bar{n} = 0 \quad (3a)$$

$$D_2 \left(\frac{d^2 n_2}{dr^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{dn_2}{dr} \right) - K_2 n_2 + S_{21} n_1 + S_{22} n_2 + A_2 \bar{n} = 0 \quad (3b)$$

Bei Schichtgeometrie ist $\gamma=0$, $D_i=D_i^{\parallel}$ zu setzen, im Fall des Zylinders $\gamma=1$, $D_i=D_i^{\perp}$. Die Größen S_{ij} sind über die Austrittswinkel integrierte, und über die Einfallswinkel gemittelte Koeffizienten für Streuung von Polarisation j nach i :

$$S_{ij} = \int \frac{d\Omega_0}{4\pi} \int d\Omega \frac{d\sigma_{ij}}{d\Omega} (\vartheta \varphi \leftarrow \vartheta_0 \varphi_0) \quad (4)$$

Nach dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts gilt $S_{12}=S_{21}=S$. Da für die (Gesamt-) Opazitäten gilt $K_i = A_i + S_{1i} + S_{2i}$, kann man die zwei Diffusionsgleichungen auch schreiben

$$D_1 \left(\frac{d^2 n_1}{dr^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{dn_1}{dr} \right) + A_1 (\bar{n} - n_1) + S (n_2 - n_1) = 0 \quad (5)$$

$$D_2 \left(\frac{d^2 n_2}{dr^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{dn_2}{dr} \right) + A_2 (\bar{n} - n_2) + S (n_1 - n_2) = 0$$

Der letzte Term ist neu, er hat die Tendenz, die beiden Photonendichten einander anzugleichen ($n_1=n_2$). Die Gleichgewichtslösung ist offensichtlich $n_1=n_2=\bar{n}$. Vervollständigt wird das Gleichungssystem durch die Randbedingungen

$$\left. \frac{dn_i}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad n_i(R) + 2 D_i \left. \frac{dn_i}{dr} \right|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

4.2. Die Lösung der gekoppelten Diffusionsgleichungen

Das homogene Gleichungssystem (ohne die Ausdrücke $A_i \bar{n}$) lösen wir mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cosh(r/\lambda) \quad (\text{Schicht})$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} I_0(r/\lambda) \quad (\text{Zylinder}) \quad (7)$$

der bereits die Randbedingung $\left. \frac{dn_i}{dr} \right|_{r=0} = 0$ erfüllt. I_0 ist die modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung (siehe z.B.

Abramowitz und Stegun 1965). Wenn man mit diesem Ansatz in die Gleichungen eingeht, kommt man zu dem Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{\lambda^2} f_1 - A_1 f_1 + S (f_2 - f_1) &= 0 \\ \frac{D_2}{\lambda^2} f_2 - A_2 f_2 + S (f_1 - f_2) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Hieraus bestimmt man zwei Eigenwerte, λ und μ ,

$$\left. \begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix} \right\} = \left[\frac{A_1 + S}{2D_1} + \frac{A_2 + S}{2D_2} \mp \sqrt{\left(\frac{A_1 + S}{2D_1} - \frac{A_2 + S}{2D_2} \right)^2 + \frac{S^2}{D_1 D_2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

sowie die dazugehörigen Eigenvektoren (f_1, f_2) und (g_1, g_2) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S/D_1 \\ \frac{A_1 + S}{2D_1} - \frac{A_2 + S}{2D_2} + \sqrt{\left(\frac{A_1 + S}{2D_1} - \frac{A_2 + S}{2D_2} \right)^2 + \frac{S^2}{D_1 D_2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{A_1 + S}{2D_1} - \frac{A_2 + S}{2D_2} + \sqrt{\left(\frac{A_1 + S}{2D_1} - \frac{A_2 + S}{2D_2} \right)^2 + \frac{S^2}{D_1 D_2}} \\ S/D_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems läßt sich dann schreiben

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{n} \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \frac{I_0(r/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} - b \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \frac{I_0(r/\mu)}{I_0(R/\mu)} \quad (11)$$

(für Zylindergeometrie). Bei Schichtgeometrie hat man I_0 durch $\cosh$ zu ersetzen. In dieser Gleichung haben wir von der Freiheit Gebrauch gemacht, von den Konstanten a und b die von r unabhängigen Faktoren $I_0(R/\lambda)$ und $I_0(R/\mu)$ abzuspalten. Wenn die Dicke der Säule (bzw. der Schicht) sehr groß wird ($R \gg \lambda, \mu$), findet man mit den asymptotischen Formeln $I_0(x) \rightarrow e^x / \sqrt{2\pi x}$ und $\cosh(x) \rightarrow e^x / 2$:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{n} \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{R-r}{\lambda}} - b \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{R-r}{\mu}} \quad (12)$$

Im Innern gehen die Photonendichten gegen einen Sättigungswert $\bar{n}$ und fallen zum Rand hin exponentiell ab. Die Größen a und b

ergeben sich aus den Randbedingungen:

$$a = \frac{A_1 - A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \bar{n}, \quad b = \frac{B_2 - B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \bar{n}, \quad (13)$$

mit

$$\begin{aligned} A_i &= f_i \left[1 + \frac{2D_i}{\lambda} \frac{I_1(R/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} \right] \\ B_i &= g_i \left[1 + \frac{2D_i}{\mu} \frac{I_1(R/\mu)}{I_0(R/\mu)} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Bei Schichtgeometrie hat man $I_1(R/\lambda)/I_0(R/\lambda)$ durch $\tanh(R/\lambda)$ zu ersetzen.

Um diese etwas unübersichtlichen Gleichungen zu verstehen, betrachten wir zwei Grenzfälle:

- (1) Schwache Kopplung, $S \ll A_{1,2}$. In diesem Fall werden die meisten Photonen in demselben Polarisationszustand absorbiert, in dem sie erzeugt wurden. Die Eigenwerte λ und μ sind gerade die Thermalisierungslängen, wie man sie für beide Moden getrennt berechnen würde,

$$\lambda, \mu \simeq \sqrt{\frac{D_1}{A_1}}, \sqrt{\frac{D_2}{A_2}} \quad (15)$$

und die dazugehörigen Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

- (2) Starke Kopplung, $S \ll A_{1,2}$. In diesem Fall werden die Photonen viele Male von einer Polarisation in die andere gestreut, bevor sie absorbiert werden (vgl. Zeichnung 9). Man erwartet, daß der Weg, den ein Photon dabei zurücklegt, weitgehend unabhängig davon ist, in welchem Polarisationszustand es erzeugt wurde. Der Parameter λ bestimmt die Thermalisierungslänge für beide Photonen,

$$\lambda \simeq \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{A_1 + A_2}}, \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

d.h. λ definiert die Längenskala, über der die gesamte

Photonendichte variiert. Der zugehörige Eigenvektor hat zwei fast gleiche Komponenten. Die andere Lösung des Eigenwertproblems beschreibt die Unterschiede zwischen den beiden Photonenkonzentrationen:

$$\mu \approx \sqrt{\frac{D_1 D_2}{S(D_1 + D_2)}} \quad , \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} D_2 / (D_1 + D_2) \\ -D_1 / (D_1 + D_2) \end{pmatrix} \quad (18)$$

μ stellt also eine Mischungslänge dar, die Länge, innerhalb derer Unterschiede zwischen den beiden Photonendichten sich ausgleichen.

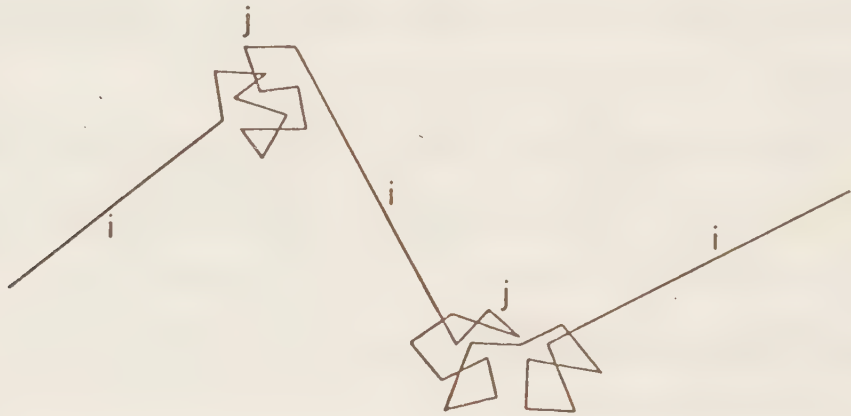


Abb. 9: Im Fall starker Kopplung, $S \gg A_{1,2}$, wechselt ein Photon oft zwischen den beiden Polarisationen hin und her, bevor es absorbiert wird (oder entweicht). Hier hat es in der Mode i eine große freie Weglänge, in der Mode j dagegen nur eine kurze.

Die Zeichnung 10 stellt die beiden Grenzfälle einander gegenüber. Sie zeigt die Photonendichte in einem Medium mit den willkürlichen Koeffizienten $K_1 = 10^4 \text{ cm}^{-1}$, $K_2 = 1 \text{ cm}^{-1}$, $\epsilon = A/K = 10^{-6}$ und $D = 1/3K$ (für beide Moden). Der Mischungskoeffizient S wurde einmal Null gesetzt (getrennte Diffusionsgleichungen), und einmal zu 0.5 cm^{-1} angenommen (starke Kopplung). Wie man sieht, ergeben sich drastische Unterschiede. Zum einen verringert sich die Thermalisierungslänge von $\sqrt{D_2/A_2}$ auf $\sqrt{(D_1 + D_2)/(A_1 + A_2)} \approx \sqrt{D_2/A_1}$, da sie gleichzeitig von der großen freien Weglänge der

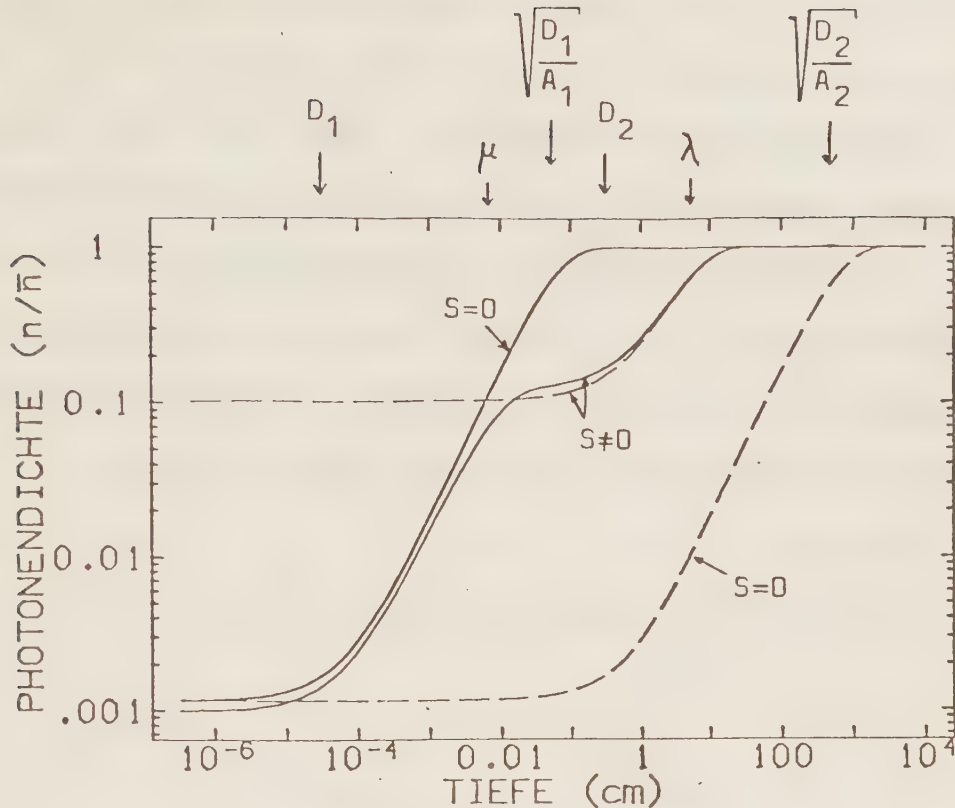


Abb. 10: Lösungen der gekoppelten Diffusionsgleichungen für eine Schicht von $2 \cdot 10^4$ cm Dicke, mit den willkürlichen Koeffizienten $D_1 = \frac{1}{3} 10^{-4}$ cm, $D_2 = \frac{1}{3}$ cm, $A_1 = 10^{-2}$ cm $^{-1}$, $A_2 = 10^{-6}$ cm $^{-1}$. Aufgetragen sind die Photonendichten n_1, n_2 (im Verhältnis zur Gleichgewichtsdichte $\bar{n}$) für die zwei Grenzfälle starker ($S = 0.5$ cm $^{-1}$) und schwacher Kopplung ($S = 0$). Man beachte die logarithmische Tiefenskala; links ist die Oberfläche, rechts die Mitte der Schicht. Pfeile markieren die Entweichtiefen D_i , Thermalisierungslängen $\sqrt{D_i/A_i}$ im ungekoppelten Fall, und die Thermalisierungs- und Mischungslängen λ und μ .

Mode 2 und dem hohen Absorptionskoeffizienten für Mode 1 bestimmt wird. Zum andern ist die entweichende Strahlung jetzt stark polarisiert, und zwar entweichen vorwiegend die Photonen mit der größeren freien Weglänge. Auch ist der gesamte Strahlungsfluß höher, wie an der höheren Photonendichte am Rand zu erkennen ist. Wegen ihrer kurzen Reichweite konnten im Fall $S=0$ die Photonen der Mode 1 nur langsam aus dem Medium herausdiffundieren. Sie waren bis dicht ($\sim \sqrt{D_1/A_1}$) unter die Oberfläche "aufgestaut".

4.

Die Streuung in die andere Polarisation eröffnet ihnen jetzt die Möglichkeit, als Photonen der Mode 2 zu entweichen. Deshalb geht der Photonenfluß wesentlich über die $\sqrt{\epsilon}$ -Grenze hinaus. Umgekehrt kann man den erhöhten Fluß von 2-Photonen so erklären, daß die Reflektivität der Atmosphäre für diese Photonen stark herabgesetzt ist. Sie dringen tief in das Medium ein und werden dort durch Streuung in kurzreichweitige Photonen umgewandelt, die absorbiert werden bevor sie entweichen können.

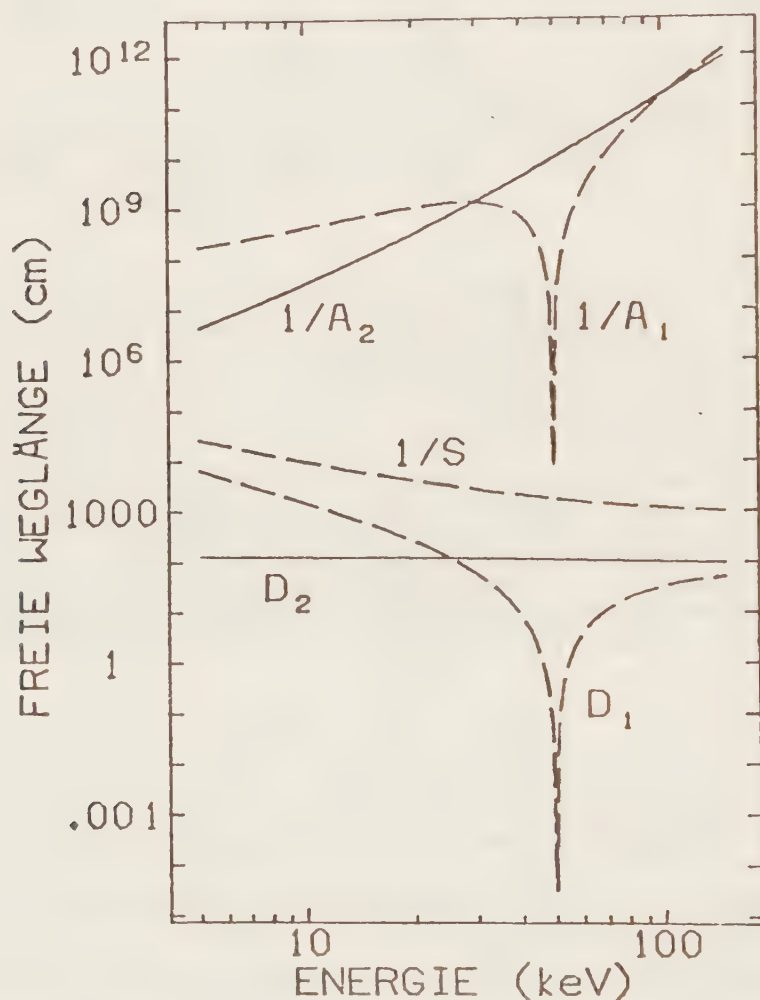


Abb. 11: Frequenzabhängigkeit der Koeffizienten $D_{1,2}$, $A_{1,2}$ und S in einem stark magnetisierten Plasma ($\rho = 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$). Der Index 1 bezieht sich auf außerordentliche, 2 auf ordentliche Photonen.

4.3. Modellspektren

Der aus einer Säule entweichende Photonenfluß der Polarisation i ergibt sich aus

$$\frac{F_i}{F_{bb}} = 4 D_i \left(a \frac{f_i}{\lambda} \frac{I_1(R/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} + b \frac{g_i}{\mu} \frac{I_1(R/\mu)}{I_0(R/\mu)} \right) \quad (19)$$

wobei die Koeffizienten a und b aus den Gleichungen (13) zu berechnen sind. Wenn man diese Formeln für alle interessierenden Frequenzen auswertet (die Frequenzabhängigkeit der fünf Koeffizienten D_1 , D_2 , A_1 , A_2 und S ist in Zeichnung 11 dargestellt), erhält man die in den Abb. 12 und 13 dargestellten Modellspektren.

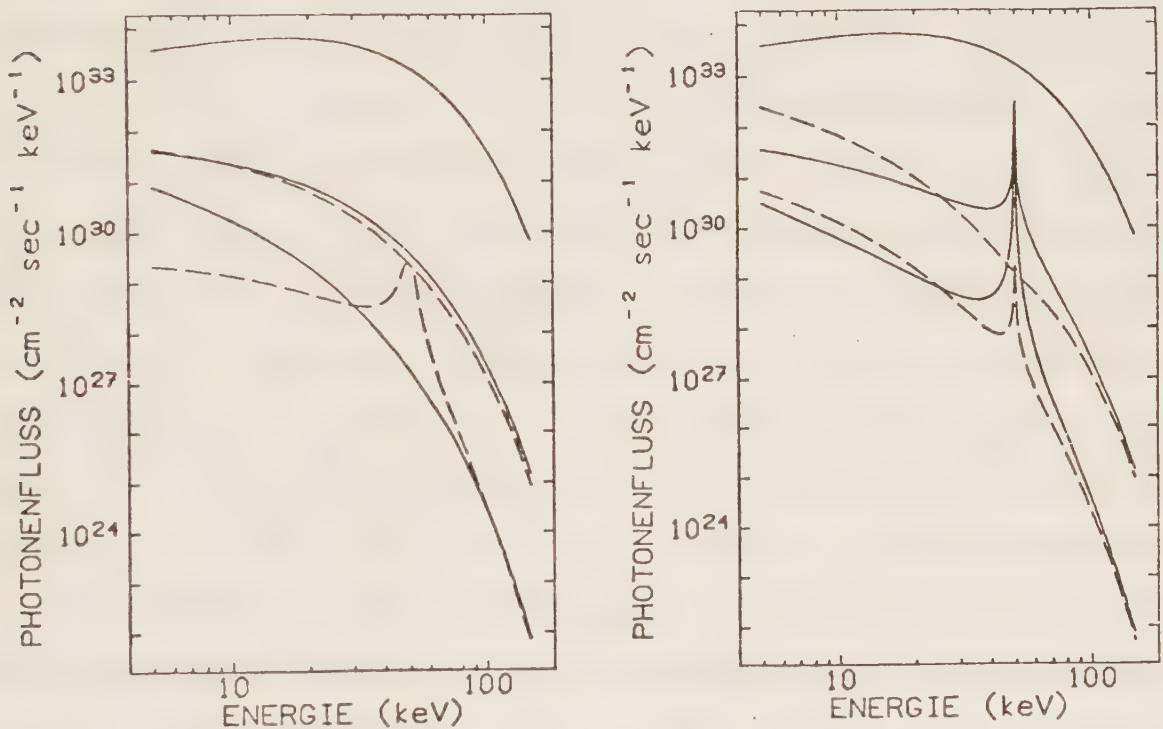


Abb. 12: Spektren einer Säule mit dem Radius 10^4 cm, Plasmaparameter wie in Abb. 11. Zum Vergleich sind auch das Schwarz-Körper-Spektrum (oben) sowie die Spektren (für beide Polarisationen) einer halb-unendlichen Atmosphäre eingezeichnet. Durchgezogen: ordentliche, gestrichelt: außerordentliche Photonen.

- (a) Lösung der ungekoppelten Gleichungen, $S=0$.
 (b) Lösung der gekoppelten Diffusionsgleichungen, S wie in Abb. 11.

4.

Betrachten wir der Einfachheit halber zunächst die Spektren, die unter der Annahme $S=0$ gewonnen wurden (keine Streuung von einer Polarisation in die andere). Abb. 12a zeigt das Spektrum einer verhältnismäßig dünnen Säule (Radius ~ 40 Thomsonlängen, Absorptionswahrscheinlichkeit pro Streuung $\sim 10^{-8}$ bei 50 keV). Die Kurve für die ordentlichen Photonen hat einen völlig glatten Verlauf, wie aus den Wirkungsquerschnitten zu erwarten, $I_{\nu} \propto \alpha(\nu) B_{\nu}$. Er entspricht ganz dem Bremsstrahlungsspektrum eines optisch dünnen, nicht magnetischen Plasmas. Das Spektrum der außerordentlichen Photonen unterscheidet sich davon durch den wesentlich herabgesetzten Fluß bei niedrigen Energien (entsprechend der Reduktion des frei-frei-Querschnitts), und die ausgeprägte Zyklotronlinie. Die Breite der Linie beruht auf einem Sättigungseffekt: der Fluß kann den Grenzwert $4 \sqrt{DA} F_{bb} \sim \sqrt{\epsilon} F_{bb}$ für eine unendlich dicke Säule nicht überschreiten. Diese Grenzspektren sind für die beiden Polarisationen ebenfalls eingezeichnet. Wie man sieht, verschwindet die Zyklotronlinie, wenn der Radius der Säule sehr groß wird. Der Grund dafür ist, daß die Absorptions- und Streukoeffizienten der außerordentlichen Photonen das gleiche Resonanzverhalten zeigen. Im Fall $S=0$ wird der Maximalfluß $F/F_{bb} \approx 4 \sqrt{DA} \sim \sqrt{\epsilon}$ vom Verhältnis des Absorptions- zum Streukoeffizienten bestimmt, das nur schwach von der Frequenz abhängt. Man kann das auch so ausdrücken, daß bei der Zyklotronfrequenz das starke Anwachsen der Emissionsrate ($A_1 \propto |\omega - \omega_c|^{-2}$) genau kompensiert wird durch die Verringerung der Schichtdicke, aus der die Photonen herausdiffundieren können ($\lambda = \sqrt{D_1/A_1} \propto |\omega - \omega_c|^2$).

Wenn man nun Streuung von einer Polarisation in die andere berücksichtigt, ändert sich das Spektrum drastisch (Abb. 12b).

Die Kopplung zwischen den Moden vergrößert die Thermalisierungslänge für außerordentliche Photonen ($\lambda \approx \sqrt{D_2/A_1} \propto |\omega - \omega_c|$). Das Anwachsen der Emissionsrate wird daher nicht mehr durch das Herabsetzen der Entweichtiefe kompensiert. Der Fluß von ordentlichen Photonen ist in etwa proportional zu $D_2/\lambda \propto |\omega - \omega_c|^{-1}$. Auf diese Weise erhält man selbst von einer unendlich ausgedehnten isothermen magnetisierten Atmosphäre starke Zyklotron- Emissionslinien. (Die Schärfe der gezeichneten Linien liegt natürlich nur daran, daß die Doppler- Verbreiterung der Wirkungsquerschnitte außer acht gelassen wurde.) Die Linienbildung hat etwas Paradoxes: im ungekoppelten Fall ($S=0$) zeigt das Spektrum keine Linie, und die Berücksichtigung eines Prozesses (Streuung von einer Polarisation in die andere) mit praktisch frequenzunabhängigem Wirkungsquerschnitt führt zu einer starken Emissionslinie. Weiterhin zeigt sich diese Linie im Spektrum der ordentlichen Photonen, deren Wirkungsquerschnitte ebenfalls fast frequenzunabhängig sind. Tatsächlich ist diese Emissionslinie Ausdruck eines Maximums im Spektrum der außerordentlichen Photonen in einer Tiefe von etwa der freien Weglänge der ordentlichen Photonen.

Der hier beschriebene Linienbildungsmechanismus unterscheidet sich grundlegend von der Art, wie in anderen astrophysikalischen Objekten Absorptions- oder Emissionslinien entstehen. Wesentlich ist die Existenz zweier Polarisationsmoden: in der einen werden Photonen mit hohem Wirkungsquerschnitt produziert, und in der anderen können sie mit großer freier Weglänge entweichen. Damit dieser Mechanismus funktioniert, müssen mehrere Voraussetzungen erfüllt sein:

- Starke Faraday-Depolarisation. Dies ist eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Transportgleichung (3.17).

Nur wenn zwischen den Streuprozessen die Phasenbeziehung zwischen ordentlichen und außerordentlichen Wellen verlorenght, kann man die so polarisierten Photonen als sich unabhängig von einander ausbreitende Teilchen behandeln.

- Große Unterschiede zwischen den freien Weglängen der beiden Moden. Da in unserem Modell nur die eine der beiden Moden resonant ist, sind die Unterschiede zwischen den Streuquerschnitten besonders kraß, und die Intensität in der Linienmitte kommt der Schwarz- Körper- Intensität sehr nahe. Wie Bonazzola et al. (1979) bemerkten, können ordentliche Photonen durch Spin- Umklappprozesse absorbiert werden, ein Effekt ähnlich der Kernspinresonanz. Dadurch treten auch in ihren Wirkungsquerschnitten Resonanzen auf, die allerdings um einen Faktor $(\hbar\omega_c/2mc^2)^2$ schwächer sind. Bei Berücksichtigung dieses Effekts wären die Zyklotronlinien in unseren Modellspektren sicherlich weniger ausgeprägt, aber immer noch vorhanden.

- Der Mischungskoeffizient S muß größer sein als die beiden Absorptionskoeffizienten A_1 , A_2 , d.h. die Gesamt-Streuquerschnitte müssen erst recht größer sein. Dies erklärt, weshalb man diese Art von Linienbildung nicht bei kleineren Magnetfeldstärken beobachten würde, d.h. bei niedrigerer Zyklotronfrequenz. Bei tiefen Frequenzen überwiegen gewöhnlich die Absorptionsquerschnitte.

Schließlich können sich den Emissionslinien noch Absorptionslinien überlagern und den soeben diskutierten Effekt völlig verdecken:

- Ein Temperaturgradient kann, wie in den Spektren der meisten Sterne, zu Absorptions- (Fraunhofer-) Linien führen. Hierzu ist zu sagen, daß ein Gradient der transversalen Temperatur in

unserem Modell bereits berücksichtigt ist. Die Besetzung der Landau-Niveaus richtet sich nach der lokalen Photonendichte und nimmt daher ebenfalls zum Rand hin ab. Dagegen hatten wir die longitudinale Temperatur als konstant angenommen. Der wirkliche Temperaturverlauf läßt sich nur mit einer gemeinsamen Transportrechnung für Elektronen und Photonen bestimmen.

- Wir haben die Transportgleichung für jede Frequenz getrennt gelöst und damit implizit angenommen, daß ein Photon mit exakt derselben Frequenz entweicht, mit der es durch frei-frei Emission erzeugt wurde. Aufgrund des Doppler-Effekts kann sich aber bei der Streuung die Frequenz eines Photons deutlich ändern ($\Delta\omega/\omega \sim 15\%$ bei $kT = 10 \text{ keV}$). Offensichtlich kann sich ein Photon schon nach wenigen Streuungen von der Zyklotronresonanz entfernen. Genauso wie Streuung von einer Polarisierung in die andere dazu führt, daß die Photonen in der Mode mit der größeren freien Weglänge entweichen, wird die Frequenz-Umverteilung dafür sorgen, daß die Photonen vorzugsweise in den Flügeln der Zyklotronlinie entweichen. Dies führt zumindest im Spektrum der außerordentlichen Photonen zu einer Absorptionslinie. Das Spektrum der wesentlich zahlreicheren ordentlichen Photonen richtet sich nach dem der außerordentlichen in einer Tiefe $\sim D_2$. Ob sich dort eine Emissionslinie zeigen wird, hängt davon ab, wie schnell Photonen, die in den Linienflügeln entweichen, durch Photonen im Linienkern ersetzt werden. Im Kapitel 6 werden wir dieses Problem weiter untersuchen.

Die Zyklotronlinie ist das Auffälligste an dem Spektrum in Fig. 12b. Streuung von einer Polarisierung in die andere beeinflusst aber auch das Kontinuum. Bei Frequenzen weit

unterhalb der Zyklotronfrequenz sind die Wirkungsquerschnitte für die beiden Moden wieder sehr verschieden, wobei die Rollen der außerordentlichen und ordentlichen Photonen vertauscht sind. In diesem Frequenzbereich haben die außerordentlichen Photonen die größere Reichweite und bestimmen das Spektrum.

Die folgenden Zeichnungen zeigen die Gesamtspektren einer Säule mit vorgegebenem Radius ($R = 10^5$ cm), bei verschiedenen Werten der Plasmadichte ($\rho = 10^{-3} \dots 10^2$ g cm $^{-3}$):

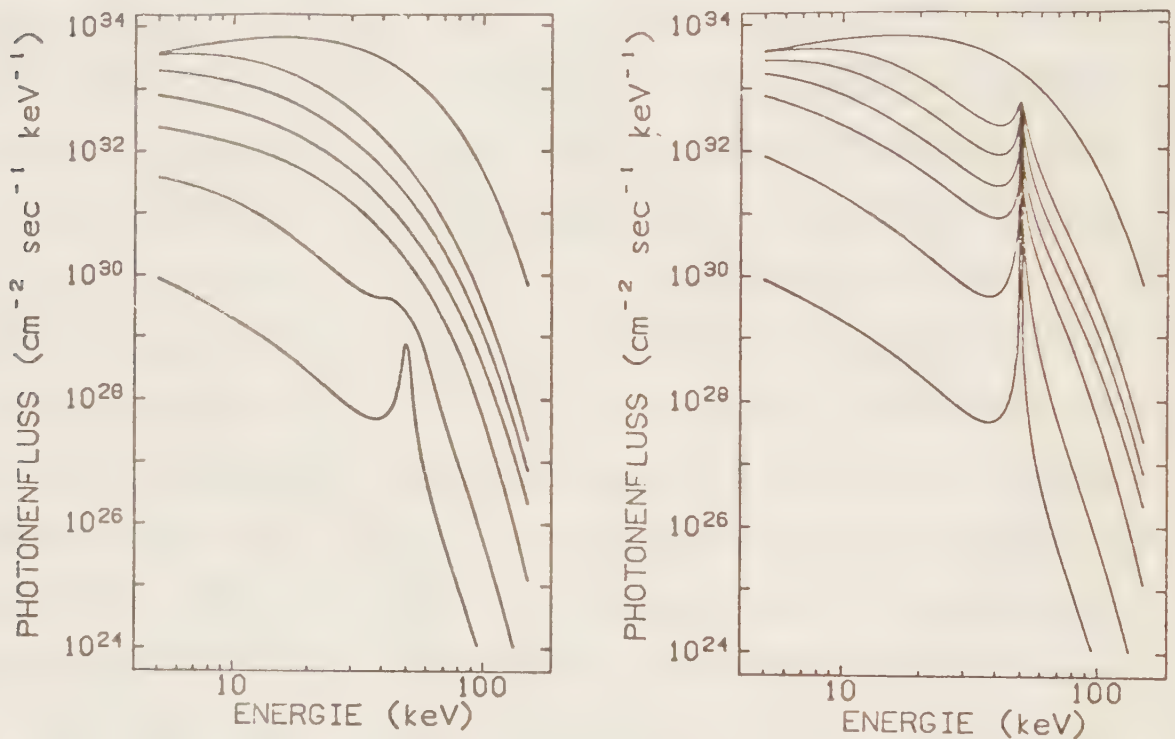


Abb. 13: Gesamtspektren (Moden 1+2) einer Säule von 10^5 cm Radius bei verschiedenen Dichten ($\rho = 10^{-3}, 10^{-2}, \dots 10^2$ g cm $^{-3}$). Temperatur $kT=10$ keV, Magnetfeld $\hbar\omega_c = 50$ keV. Die oberste Kurve zeigt das Schwarzkörper-Spektrum zur Temperatur 10 keV.

- (a) Lösung der ungekoppelten Gleichungen, $S=0$.
- (b) Spektren bei Berücksichtigung der Streuung von einer Polarisation in die andere.

Sie illustrieren noch einmal den großen Einfluß, den die Streuung von einer Polarisation in die andere auf das Spektrum hat. In den Frequenzbereichen, wo die Säule "effektiv" optisch dünn ist

($R \ll \lambda$), variiert die Intensität mit ρ^2 , wie bei Bremsstrahlung zu erwarten. Wenn die Dicke der Säule die Thermalisierungslänge überschritten hat, wächst der Fluß nur noch mit $\sqrt{\rho}$ (wegen $F \sim \sqrt{E} F_{bb}$), bis schließlich der Schwarz-Körper-Fluß erreicht ist.

In diesem Kapitel haben wir gesehen, wie die Polarisations-Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte die Spektren stark magnetisierter Modell-Atmosphären prägt. Mit den zwei gekoppelten Diffusionsgleichungen haben wir gewissermaßen das einfachste nicht-triviale Strahlungstransportproblem abgehandelt. Neben einem interessanten Mechanismus für die Bildung von Zyklotronlinien haben wir etwas gefunden, was man als "Grundregel" der Strahlungstransporttheorie bezeichnen könnte: während im optisch dünnen Fall nur die Photonen mit hohen Wirkungsquerschnitten wichtig sind, überwiegen im optisch dicken Fall Photonen mit großen freien Weglängen. Im nächsten Kapitel werden wir hierfür weitere Beispiele finden.

5. DIE ANISOTROPIE DER ENTWEICHENDEN STRAHLUNG

Wir kommen jetzt zu der naheliegenden Frage, wie sich die durch das starke Magnetfeld hervorgerufene Anisotropie auf die Winkelverteilung der entweichenden Strahlung auswirkt. Bevor wir eine allgemeine numerische Methode zur Lösung des anisotropen Transportproblems beschreiben, wollen wir eine angenäherte analytische Lösung angeben. Diese hat den Vorteil, daß Ergebnisse nicht nur einfacher zu gewinnen, sondern auch leichter zu verstehen sind.

5.1. Angenäherte Berechnung der Winkelverteilung

Statt der vollen Richtungsabhängigkeit des Strahlungsfelds liefern uns die bisher betrachteten Diffusionsgleichungen nur Mittelwerte: die Dichten von ordentlichen und außerordentlichen Photonen. Information über die Winkelabhängigkeit läßt sich aber - wenigstens näherungsweise - nachträglich aus den Photonendichten gewinnen (Morse und Feshbach 1953). Zur Illustration des Prinzips betrachten wir eine einfache Diffusionsgleichung, wobei wir von Absorption und Emission absehen,

$$D \frac{d^2 n}{dr^2} = 0 . \quad (1)$$

Aus der Randbedingung

$$2D \left. \frac{dn}{dr} \right|_{r=R} + n(R) = 0 \quad (2)$$

folgt dann sofort die Abhängigkeit der Photonendichte von der Tiefe $t=R-r$: $n = \text{const} \cdot (2D+t)$. Damit können wir abschätzen, wieviele Photonen an jedem Punkt pro Zeiteinheit in ein bestimmtes Raumwinkelelement gestreut werden:

$$q = \frac{c}{4\pi} \sigma n \quad [cm^{-3} \sec^{-1} \text{ster}^{-1}] \quad (3)$$

Wenn man mit der Wahrscheinlichkeit, daß das Photon ungehindert entweicht,

$$p(t) = e^{-\sigma t / \cos \vartheta}, \quad (4)$$

multipliziert und über die Tiefe t integriert, erhält man den entweichenden Strahlungsstrom

$$F(\vartheta) = \frac{c}{4\pi} \sigma \int_0^{\infty} dt \, n(t) e^{-\sigma t / \cos \vartheta} \quad [cm^{-2} \sec^{-1} \text{ster}^{-1}]. \quad (5)$$

Da n linear von t abhängt, ist das Integral elementar. In diesem Fall liefert sogar eine Gauß- Laguerre- Integration (Krylov 1962) mit nur einem Stützpunkt das exakte Resultat:

$$\int_0^{\infty} dt \, \frac{\sigma}{\cos \vartheta} n(t) e^{-\frac{\sigma t}{\cos \vartheta}} = n(t^*), \quad (6)$$

mit der mittleren Entweichtiefe

$$t^* = \frac{\int dt \, \rho(t) t}{\int dt \, \rho(t)} = \frac{\cos \vartheta}{\sigma}. \quad (7)$$

Für die Intensität, $I(\vartheta) = F(\vartheta) / \cos \vartheta$, findet man

$$I(\vartheta) = \frac{c}{4\pi} n(t^*) = \text{const} * (2D + t^*), \quad (8)$$

eine Form der bekannten Eddington- Barbier- Beziehung (Unsöld 1955, S. 113). Diese Formel wurde erstmals von Kanno (1975) auf ein stark magnetisiertes Plasma angewandt, mit über die beiden Polarisationen gemittelten Diffusionskonstanten, $D = \frac{1}{2}(D_1'' + D_2'')$, und Eindringtiefen, $t^* = \cos \vartheta * \frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma_1(\vartheta)} + \frac{1}{\sigma_2(\vartheta)})$. Zu beachten ist, daß hier die Winkelabhängigkeit der Eindringtiefe nicht mehr allein durch den Faktor $\cos \vartheta$ bestimmt wird. Die oben gegebene Begründung der Beziehung (8) ist wesentlich durchsichtiger als Kanno's Herleitung. Unsere Herleitung beruht auf zwei Näherungen. Erstens wird eine gemittelte Intensität aus dem die Quellfunktion definierenden Integral herausgezogen:

$$\int d\Omega_0 \, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta \leftarrow \vartheta_0) I(\vartheta_0) \rightarrow \int d\Omega_0 \, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta \leftarrow \vartheta_0) \langle I \rangle = \sigma(\vartheta) \langle I \rangle. \quad (9)$$

[Die letztere Umformung ist möglich wegen der Symmetrie des Streuquerschnitts, $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta \leftarrow \vartheta_0) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta_0 \leftarrow \vartheta)$.] Zweitens wird die gemittelte Intensität, die bis auf einen Faktor $c/4\pi$ mit der wahren Photonendichte identisch ist, ersetzt durch den Näherungswert n , der sich aus der Diffusionsgleichung ergibt.

Der erste Schritt sollte eine gute Näherung darstellen. Tatsächlich gilt (9) exakt im Fall isotroper Streuung, die wiederum ein Spezialfall "völliger Umverteilung" ist:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta \leftarrow \vartheta_0) = \frac{1}{4\pi \langle \sigma \rangle} \sigma(\vartheta) \sigma(\vartheta_0) \quad (10)$$

Wenn sich der differentielle Wirkungsquerschnitt in diese Form bringen läßt, besteht keine Korrelation zwischen ϑ und ϑ_0 . Das Photon "vergißt" also, welche Richtung es vor dem Streuakt hatte. In diesem Fall gilt eine Variante von (9) exakt:

$$\int d\Omega_0 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta \leftarrow \vartheta_0) I(\vartheta_0) = \sigma(\vartheta) \int \frac{d\Omega_0}{4\pi} \frac{\sigma(\vartheta_0)}{\langle \sigma \rangle} I(\vartheta_0) \quad (11)$$

Das Transportproblem reduziert sich also auf die Berechnung der Tiefen- Abhängigkeit des speziellen Mittelwerts $J = \langle \sigma I \rangle / \langle \sigma \rangle$. Dies ermöglichte es Basko (1976), das Problem mit Sobolev's Methode zu behandeln, denn der Wirkungsquerschnitt für ordentliche und außerordentliche Photonen ist bei tiefen Frequenzen ($\omega \ll \omega_c$) genau von der Form (10):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta' \leftarrow \vartheta) \simeq r_0^2 |e_z(\vartheta')|^2 |e_z(\vartheta)|^2 \quad (12)$$

Die Annahme vollständiger Umverteilung ist vermutlich auch bei höheren Frequenzen ganz gut, wo die Anisotropie nicht so ausgeprägt ist.

Der zweite Schritt bei der Herleitung der Formel (8) läßt sich weniger gut rechtfertigen: die Verwendung der aus der Diffusionsgleichung berechneten Photonendichte an Stelle der über die Richtungen gemittelten Intensität. Wenn man diese Näherung

akzeptiert, erhält man die Richtungsverteilung der entweichenden Strahlung durch eine einfache Integration. Es besteht auch die Möglichkeit, die Eddington- Barbier- Beziehung auf den Fall einer endlichen Schicht zu verallgemeinern: $I(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta}{\kappa(\vartheta)} q(\vartheta, t^*)$, wobei t^* eine mittlere Tiefe ist, aus der die Photonen entweichen,

$$t^* = \frac{\int_0^{2R} dt \rho(t) t}{\int_0^{2R} dt \rho(t)} = \frac{\cos \vartheta}{\kappa(\vartheta)} - 2R \frac{e^{-2\kappa R / \cos \vartheta}}{1 - e^{-2\kappa R / \cos \vartheta}} \quad (13)$$

Bei großer Dicke ($R \gg \cos \vartheta / \kappa$) ist $t^* \simeq \cos \vartheta / \kappa$, und im entgegengesetzten Grenzfall $t^* \simeq R$. Wir werden diese verallgemeinerte Beziehung hier jedoch nicht benutzen, weil es nur wenig schwieriger ist, die Integrale über die (genäherte!) Quellfunktion exakt auszuführen.

Die Methode läßt sich ganz zwanglos auf zwei Polarisationsmoden verallgemeinern. Wenn man auch die thermische Emission berücksichtigt, kann man für die Quellfunktion setzen

$$\frac{4\pi}{c} q_1 = \sigma_{11}(\vartheta) n_1 + \sigma_{12}(\vartheta) n_2 + \alpha_1(\vartheta) \bar{n} \quad (14)$$

$$\frac{4\pi}{c} q_2 = \sigma_{21}(\vartheta) n_1 + \sigma_{22}(\vartheta) n_2 + \alpha_2(\vartheta) \bar{n}$$

Hierbei ist

$$\sigma_{ij}(\vartheta) = \int d\Omega_0 \frac{d\sigma_{i \leftarrow j}}{d\Omega}(\vartheta \leftarrow \vartheta_0) \quad (15)$$

der über die Einfallsrichtungen integrierte Streukoeffizient von Polarisation j nach i . Aus Symmetriegründen gilt auch

$$\sigma_{ij}(\vartheta) = \int d\Omega_0 \frac{d\sigma_{j \leftarrow i}}{d\Omega}(\vartheta_0 \leftarrow \vartheta) \quad (16)$$

d.h. $\sigma_{ij}(\vartheta)$ ist der Koeffizient für Streuung von i nach j , und $\sum_{j=1,2} \sigma_{ij}(\vartheta) = \sigma_i(\vartheta)$ ist der gesamte Streuquerschnitt für Photonen der Polarisation i . Die $\bar{n}$ enthaltenden Terme in Gleichung (14) geben die thermische Emission an, und sind in unserem isothermen Modell unabhängig von der Tiefe. Die anderen Terme beschreiben die Photonen, die in der Nähe des betrachteten Raumpunkts in die Richtung ϑ gestreut werden. Diese Glieder sind proportional zur

Photonendichte und daher tiefenabhängig.

Der Gesamtstrom von Photonen der Polarisation j ergibt sich also aus dem Integral

$$\int dV \, q_j(r, \vartheta) \, p_j(r, \vartheta) \quad [\text{Photonen sec}^{-1} \text{ ster}^{-1}], \quad (17)$$

das über das gesamte strahlende Volumen zu erstrecken ist. Für eine Schicht der Fläche A ist $dV = A \, dr$, und für eine Säule der Länge h ist $dV = h \, 2\pi r \, dr$. Division dieses Integrals durch die dem Beobachter zugewandte (projizierte) Fläche, $A \cos \vartheta$ (Schicht) bzw. $2Rh \sin \vartheta$ (Säule), liefert die Intensität $I_j(\vartheta)$. Die Entweichwahrscheinlichkeit $p_j(r, \vartheta)$ für ein am Punkt r in Richtung ϑ ausgesandtes Photon wird im allgemeinen für die beiden Polarisationen ($j=1,2$) sehr verschieden sein. Bei Schichtgeometrie ist einfach

$$p_j(r, \vartheta) = \exp \left(-\kappa_j \frac{R-r}{\cos \vartheta} \right), \quad (18)$$

weil die zu durchquerende Schichtdicke nicht vom Azimutwinkel abhängt. Dagegen ist bei Zylindergeometrie die Entweichwahrscheinlichkeit gegeben durch das Integral

$$p_j(r, \vartheta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp \left(-\kappa_j \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi}{\sin \vartheta} \right), \quad (19)$$

wenn wir annehmen, daß Emission in alle φ -Richtungen gleich wahrscheinlich ist.

Mit der Lösung (4.11) der gekoppelten Diffusionsgleichungen ergibt sich für die Schicht explizit

$$\begin{aligned} \frac{I_i(\vartheta)}{B} &= \int_{-R}^R \frac{dr}{\cos \vartheta} e^{-\kappa_i \frac{R-r}{\cos \vartheta}} \left[\alpha_i + \sigma_{i1} n_1(r)/\bar{n} + \sigma_{i2} n_2(r)/\bar{n} \right] \\ &= 1 - e^{-\frac{2\kappa_i R}{\cos \vartheta}} - (\sigma_{i1} f_1 + \sigma_{i2} f_2) \frac{a E_i(\lambda)}{1 + e^{-2R/\lambda}} \\ &\quad - (\sigma_{i1} g_1 + \sigma_{i2} g_2) \frac{b E_i(\mu)}{1 + e^{-2R/\mu}} \end{aligned} \quad (20)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$E_i(\lambda) = \int_{-R}^R \frac{dr}{\cos \vartheta} e^{-\kappa_i \frac{R-r}{\cos \vartheta}} \left(e^{-\frac{R-r}{\lambda}} + e^{-\frac{R+r}{\lambda}} \right) =$$

$$E_i(\lambda) = \frac{1 - e^{-2R/\lambda - 2x_i R / \cos \vartheta}}{x_i + \cos \vartheta / \lambda} + \frac{e^{-2R/\lambda} - e^{-2x_i R / \cos \vartheta}}{x_i - \cos \vartheta / \lambda} \quad (21)$$

eingeführt haben. Leider ist das Integral im Fall der strahlenden Säule,

$$\frac{I_i(\vartheta)}{B} = \int_0^R \frac{\pi dr}{\sin \vartheta} \frac{r}{R} p_i(r, \vartheta) \left[\alpha_i + \sigma_{i1} n_1(r) / \bar{n} + \sigma_{i2} n_2(r) / \bar{n} \right] \quad (22)$$

wesentlich schwieriger. Es wurde numerisch, mit Hilfe der Simpson'schen Regel, ausgewertet. Dabei erstreckte sich der Integrationsbereich von $t := R - r = 0$ bis $t_M = \min(R, 10 \frac{\sin \vartheta}{x_i(\vartheta)})$, und die Stützstellen waren $t_k / t_M = 0 \quad (0.0125) \quad 0.05 \quad (0.025) \quad 0.3 \quad (0.05) \quad 0.4 \quad (0.1) \quad 0.6 \quad (0.2) \quad 1$ (in Klammern die Abstände zwischen den Stützstellen). Aus Symmetriegründen genügt es, das Integral für die Entweichwahrscheinlichkeit $p_i(r, \vartheta)$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ zu nehmen. Hierfür wurde die Trapezregel, mit 16 Äquidistanten Stützstellen benutzt.

Wir verschieben die Diskussion der Ergebnisse auf den letzten Abschnitt dieses Kapitels, wo wir mit einer genaueren Lösung des Transportproblems vergleichen können.

5.2. Erweiterung des Systems der Diffusionsgleichungen

Von der soeben beschriebenen Methode, die Richtungsverteilung der entweichenden Strahlung zu bestimmen, kann man nur qualitativ richtige Ergebnisse erwarten. Das Hauptproblem ist, daß wir die detaillierte Winkelabhängigkeit der Streuquerschnitte erst nachträglich berücksichtigen. Wenn wir die zwei gekoppelten Diffusionsgleichungen benutzen, haben wir schon einen großen Teil dieser Information über Bord geworfen. Eine Verbesserung des Verfahrens muß daher bei der Transportgleichung ansetzen.

Chandrasekhar hat ein Näherungsverfahren angegeben, das als Ausgangspunkt sowohl für analytische als auch numerische Rechnungen außerordentlich fruchtbar ist (beschrieben in Chandrasekhar 1960). Die Integrodifferentialgleichung der Strahlungstransporttheorie wird auf ein System von einfachen Differentialgleichungen zurückgeführt, indem man das Strahlungsfeld durch die Intensität in einigen ausgewählten Richtungen darstellt, und das Integral in der Transportgleichung durch eine Quadratursumme ersetzt:

$$S(\Omega) = \frac{1}{\kappa} \int d\Omega_0 \frac{d\sigma}{d\Omega} I(\Omega_0) + \frac{\alpha}{\kappa} B \quad (23)$$

$$S(\Omega_i) \approx \frac{1}{\kappa_i} \sum_j w_j \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega_i \leftarrow \Omega_j) I(\Omega_j) + \frac{\alpha(\Omega_i)}{\kappa(\Omega_i)} B$$

Die w_j sind geeignete Gewichtungsfaktoren. Mit einer großen Zahl von Stützstellen kann man die Transportgleichung im Prinzip beliebig genau approximieren. Als genauestes Quadraturverfahren wird meist das Gaußsche benutzt, sofern nicht die spezielle Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts ein anderes Verfahren nahelegt.

Wenn wir diesen Trick auf die Transportgleichung (3.11) für die Schicht anwenden, erhalten wir Gleichungen der Gestalt (Feautrier 1964)

$$D_i \frac{d^2 u_i}{d\tau^2} - K_i u_i + \sum_{j=1}^N S_{ij} u_j + A_i \bar{u} = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (24)$$

eine offensichtliche Verallgemeinerung des Systems (4.3) von zwei gekoppelten Diffusionsgleichungen. Photonen können nicht nur zwischen zwei Polarisationszuständen, sondern auch zwischen verschiedenen Ausbreitungsrichtungen wechseln. Diffusionskonstante, Absorptions- und Streukoeffizient für ein Photon hängen davon ab, in welchem Winkel- oder Polarisations-"Kanal" es sich befindet:

$$D_i = \cos^2 \vartheta_i / \kappa_i(\vartheta_i)$$

$$A_i = \alpha_i(\vartheta_i) \quad (25)$$

$$\kappa_i = \kappa_i(\vartheta_i) = \alpha_i(\vartheta_i) + \sigma_i(\vartheta_i)$$

Gekoppelt sind die Diffusionsgleichungen durch die Umverteilungsmatrix S , deren Elemente S_{ij} die Wahrscheinlichkeit der Streuung von Kanal j nach Kanal i kennzeichnen

$$S_{ij} = 4\pi w_j \frac{d\sigma^{(i \leftarrow j)}}{d\Omega}(\vartheta_i \leftarrow \vartheta_j) \quad (26)$$

Die w_j sind Gewichte für Gauß-Quadratur auf dem Intervall $[0,1]$, mit den Stützstellen $\cos \vartheta_j$ ($0 < \vartheta_j < \frac{\pi}{2}$) (Abramowitz und Stegun 1965, S.916). In den noch zu beschreibenden numerischen Rechnungen wurden meist 16 Winkel benutzt, d.h. es wurden $N=32$ gekoppelte Diffusionsgleichungen (für ordentliche und außerordentliche Photonen) gelöst. Als differentieller Wirkungsquerschnitt wurde die über den Azimut gemittelte Form (2.24) verwendet. Das ist bei Schichtgeometrie korrekt, da aus Symmetriegründen das Strahlungsfeld vom Azimutwinkel φ unabhängig sein muß.

Bei Zylindergeometrie ist dies nicht der Fall. Die Lösung der Transportgleichung muß eine Mitte- Rand- Verdunkelung zeigen (Unsöld 1955, S.39f.), d.h. einen Abfall der Intensität $I(R, \vartheta, \varphi)$ von $\varphi=0$ nach $\varphi = \pi/2$. Da die Wirkungsquerschnitte von φ unabhängig sind, sollte diese Variation jedoch keine große Rolle spielen. Um den Rechenaufwand zu begrenzen, betrachten wir daher nur die ϑ -Abhängigkeit der Intensität, also die mit dem Magnetfeld zusammenhängende Anisotropie des Strahlungsfelds, während wir die φ -Abhängigkeit durch eine Art Diffusionsnäherung unterdrücken. Wenn man in der Transportgleichung (3.11) für Zylindergeometrie die Ableitungen nach φ wegläßt und für $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ den Mittelwert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ einsetzt, erhält man Gleichungen der

Form

$$D_i \left(\frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_i}{dr} \right) - K_i u_i + \sum_{j=1}^N S_{ij} u_j + A_i \bar{u} = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (27)$$

mit den Diffusionskonstanten

$$D_i = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta_i / \kappa_i(\vartheta_i) . \quad (28)$$

Die übrigen Koeffizienten sind dieselben wie im Fall der Schicht. Eine weitere Mittelung über den Winkel ϑ brächte uns offensichtlich zurück zu den beiden Diffusionsgleichungen, die wir im vorigen Kapitel betrachtet haben. Da die Gleichungen (27) nur näherungsweise gültig sind, kann man auch nur eine näherungsweise gültige Randbedingung angeben. Bei den Rechnungen für Zylindergeometrie wurde benutzt

$$u_i(R) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \vartheta_i}{\kappa_i(\vartheta_i)} \frac{du_i}{dr} \Big|_{r=R} = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (29)$$

eine Beziehung, die sich aus (3.13) ergibt, wenn man die φ -Ableitung wegläßt und für $\cos \varphi$ den Mittelwert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ einsetzt.

Ein System von 32 gekoppelten Differentialgleichungen läßt sich im Prinzip genauso lösen wie die 2 gekoppelten Gleichungen: erstens Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren, und zweitens Anpassung einer Linearkombination der Eigenlösungen an die Randbedingungen. Leider ist es aber nicht möglich, die Eigenwerte z.B. einer 32x32-Matrix explizit hinzuschreiben. Das Eigenwertproblem wäre nur numerisch zu lösen. Die aufwendige Berechnung der Eigenwerte läßt sich aber umgehen, wenn man ein numerisches Verfahren benutzt, das direkt bei dem zu lösenden Gleichungssystem ansetzt, und das von Feautrier (1964) angegeben wurde.

5.3. Die Feautrier-Methode

Feautrier (1964) machte das erweiterte System von Diffusionsgleichungen zum Ausgangspunkt für eine numerische Lösung des Strahlungstransportproblems. Die Grundidee ist, das System als gewöhnliche Differentialgleichung für den N-dimensionalen Vektor u aufzufassen, und ein Differenzenverfahren darauf anzuwenden (Mihalas 1978). Man setzt

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx \frac{2}{r_{d+1} - r_{d-1}} \left(\frac{u_{d+1} - u_d}{r_{d+1} - r_d} - \frac{u_d - u_{d-1}}{r_d - r_{d-1}} \right) \tag{30}$$

u_d ist ein Vektor, der das Strahlungsfeld an der Stützstelle r_d ($d=0,1,\dots,D$) beschreibt. In Zylindergeometrie schreiben wir entsprechend

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \approx \frac{2}{r_{d+1} - r_{d-1}} \left(\frac{u_{d+1} - u_d}{r_{d+1} - r_d} - \frac{u_d - u_{d-1}}{r_d - r_{d-1}} + \frac{u_{d+1} - u_{d-1}}{2 r_d} \right) \tag{31}$$

Dadurch wird das Problem auf die Inversion einer großen Matrix zurückgeführt:

$$\begin{pmatrix} B_0 & -C_0 & & & \\ -A_1 & B_1 & -C_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -A_{D-1} & B_{D-1} & -C_{D-1} \\ \bigcirc & & & & & -A_D & B_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{D-1} \\ u_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{D-1} \\ Q_D \end{pmatrix} \tag{32}$$

wobei die Elemente A_d , B_d , C_d und Q_d ihrerseits $N \times N$ -Matrizen sind, die die Diffusionskonstanten, Streu- und Absorptionskoeffizienten enthalten,

$$A_d = \frac{2}{r_{d-1} - r_{d+1}} \left(\frac{1}{r_{d-1} - r_d} + \frac{\gamma}{2 r_d} \right) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & D_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$
$$B_d = \frac{2}{r_{d-1} - r_{d+1}} \left(\frac{1}{r_d - r_{d+1}} + \frac{1}{r_{d-1} - r_d} \right) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & D_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & K_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boxed{S_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$C_d = \frac{2}{r_{d-1} - r_{d+1}} \left(\frac{1}{r_d - r_{d+1}} - \frac{\gamma}{2r_d} \right) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & D_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$Q_d = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & A_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Bandstruktur der Matrix (32) rührt natürlich von der einfachen Form des Differenzenoperators (30,31) her, der das Strahlungsfeld an einem Punkt r_d nur mit den Nachbarpunkten $r_{d\pm 1}$ verknüpft. Aus den Randbedingungen folgen die erste und die letzte Zeile von (32), die $u_0 = u(R)$ mit u_1 und u_{D-1} mit $u_D = u(0)$ verbinden:

$$B_0 = \left(\frac{2}{r_0 - r_1} + \frac{\gamma}{R} \right) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \beta_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} + \frac{2}{(r_0 - r_1)^2} \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & D_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & K_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & S_{ij} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$C_0 = \frac{2}{(r_0 - r_1)^2} \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & D_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A_D = \frac{2(1+\gamma)}{r_{D-1}^2} \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & D_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$B_D = \frac{2(1+\gamma)}{r_{D-1}^2} \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & D_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & K_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & S_{ij} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Hier ist $\beta_i = \cos \vartheta_i$ (Schicht) bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta_i$ (Säule).

Erleichtert wird die Inversion des Gleichungssystems (32) durch die Drei-Diagonal-Struktur der Matrix. Beginnend mit der kleinsten Tiefe, $d=0$, berechnet man $C'_0 = B_0^{-1} C_0$, $Q'_0 = B_0^{-1} Q_0$, und eliminiert nach und nach die untere Nebendiagonale A_d ("Gaußscher Algorithmus", siehe z.B. Zurmühl 1964):

$$\begin{aligned} C'_d &= (B_d - A_d C'_{d-1})^{-1} C_d \\ Q'_d &= (B_d - A_d C'_{d-1})^{-1} (Q_d + A_d Q'_{d-1}) \end{aligned} \quad \left| \quad d=1, \dots, D \quad (35) \right.$$

Bei jedem Schritt ist eine $N \times N$ -Matrix zu invertieren. Der Rechenaufwand wird vor allem von der Zahl N der gemeinsam zu lösenden Diffusionsgleichungen bestimmt, bei großen Matrizen ist er proportional zu N^3 . Wenn die letzte Matrix invertiert ist, hat man das große Gleichungssystem (32) in die Form gebracht

$$\begin{pmatrix} 1 & -C'_0 & & & 0 \\ & 1 & -C'_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & -C'_{D-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{D-1} \\ u_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q'_0 \\ Q'_1 \\ \vdots \\ Q'_{D-1} \\ Q'_D \end{pmatrix} \quad (36)$$

Das Strahlungsfeld findet man durch einfache Rücksubstitution.

Ausgehend von der größten Tiefe $d=D$, wo $u_D = Q'_D$, berechnet man

$$u_{d-1} = Q'_{d-1} + C'_{d-1} u_d \quad \Big| \quad d = D, \dots, 1 \quad (37)$$

bis bei $d=0$ die Intensität der entweichenden Strahlung, $I(R) = 2 u_0$, bestimmt ist.

Ein wichtiger Vorzug der Feautrier-Methode ist, daß der Rechenaufwand kaum von der optischen Dicke des Mediums abhängt. Zum einen ist wegen der Bandstruktur die Zahl der erforderlichen Matrix-Inversionen gleich der Zahl der Stützstellen in verschiedenen optischen Tiefen. Der Rechenaufwand wächst daher nur mit D und nicht etwa mit D^3 . Zum anderen können im Innern eines optisch dicken Mediums, wo das Strahlungsfeld nur schwach von der Tiefe abhängt, sehr weit auseinander liegende Stützstellen gewählt werden. Die Abstände können größer sein als die größten Diffusionskonstanten in dem Gleichungssystem (27). Nur am Rand müssen die Stützstellen sehr dicht gesetzt werden, mit Abständen, die klein sind gegen die kleinste Diffusionskonstante in (27). Bewährt hat sich eine logarithmische Verteilung (Mihalas 1978). Hier benutzen wir in $\lg(t+\Delta)$ Äquidistante Stützstellen, wobei

$\Delta = 10^{-2} \min\{D_i \mid i=1, \dots, N\}$ eine untere Grenze für die Abstände der Stützstellen darstellt, und die Dichte der Stützstellen 4 oder 5 pro Dekade beträgt:

$$t_d = R - \tau_d = \Delta \left[\left(1 + \frac{R}{\Delta} \right)^{\frac{d}{D}} - 1 \right] \quad \left| \quad d = 0, 1, \dots, D \quad (38) \right.$$

Offensichtlich ist $t_0 = 0$ und $t_D = R$. Um das Transportproblem für eine 10-mal dickere Atmosphäre zu lösen, benötigt man 4 bis 5 zusätzliche $(N \times N)$ Matrix-Inversionen, das ist in der Regel eine Steigerung des Rechenaufwands um 10 ... 20%. Im Gegensatz zu manchen anderen Methoden (z.B. Monte-Carlo Verfahren) kann man mit der Feautrier-Methode daher auch die Strahlung sehr dicker Medien berechnen.

5.4. Ergebnisse

Die Feautrier-Methode wurde auf strahlende Schichten und Säulen verschiedener optischer Dicken, und auf Strahlung unterschiedlicher Frequenzen angewandt. Abbildung 14b zeigt beispielsweise die Strahlungsintensität an der Oberfläche einer 200 m dicken Plasmaschicht der Dichte 0.1 g cm^{-3} und Temperatur 10 keV, bei einer Photonenenergie (10 keV) von einem Fünftel der Zyklotronenergie. Wie man sieht, hat für beide Polarisierungen die Intensität eine sehr ähnliche Winkelabhängigkeit wie die Eindringtiefe, $\cos \vartheta / \kappa(\vartheta)$, die in Zeichnung 14a zum Vergleich dargestellt ist. Dies ist ein Beispiel für die Eddington-Barbier-Beziehung, die wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels bereits diskutiert haben. Im optisch dicken Fall entweichen die Photonen vorzugsweise in die Richtungen, in denen die freie Weglänge (oder, richtiger, ihre Projektion in Normalenrichtung, $\cos \vartheta / \kappa(\vartheta)$) besonders groß ist.

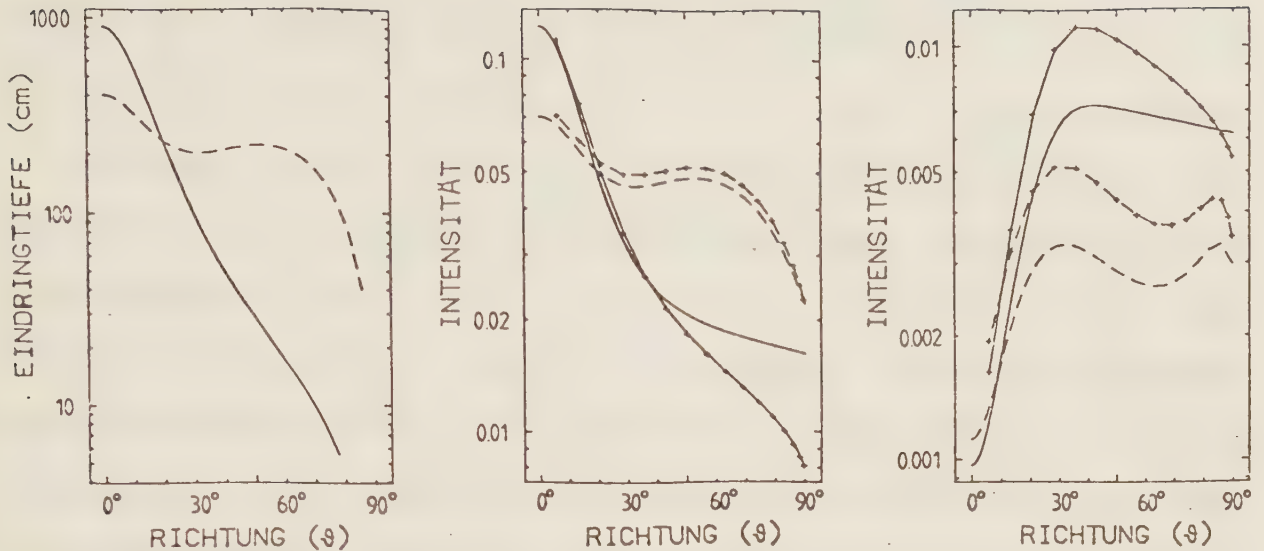


Abb. 14: (a) Die Eindringtiefen, $\cos \vartheta / \kappa_i(\vartheta)$, für ordentliche (durchgezogen) und außerordentliche Photonen (gestrichelt) der Energie 10 keV in einer Plasmaschicht ($\rho = 0.1 \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$).

(b) Die Strahlungsintensität $I(\vartheta)$, bezogen auf die Schwarz-Körper-Intensität, für ordentliche und außerordentliche Photonen an der Oberfläche einer 200 m dicken Schicht, als Funktion der Richtung zum Magnetfeld. Die 16 Winkel, die in der numerischen Rechnung benutzt wurden, sind durch Kreuzchen markiert. Die glatten Kurven zeigen die genäherten Intensitäten, die sich aus den zwei gekoppelten Diffusionsgleichungen ergeben.

(c) Wie (b) für eine 200 cm dicke Schicht.

Im optisch dünnen Fall ist das genau umgekehrt. Dort entweichen die meisten Photonen in Richtungen, in denen der Wirkungsquerschnitt groß ist. Die Intensität ist proportional zur Emissivität, d.h. zum Absorptionskoeffizienten, $\alpha(\vartheta)$, und zur in der Schicht durchlaufenen Strecke, $2R/\cos \vartheta$. Weil die Streu- und Absorptionskoeffizienten fast die gleiche Winkelabhängigkeit haben, $\alpha(\vartheta) \propto \sigma(\vartheta) \propto \kappa(\vartheta)$, kann man auch sagen, daß die Intensität im optisch dünnen Fall zu $\kappa(\vartheta)/\cos \vartheta$ proportional ist, d.h. zum Kehrwert der Eindringtiefe. Abb. 14c zeigt eine Schicht, die für Strahlung aus der Richtung $\vartheta \approx 0$

(parallel zum Magnetfeld) durchsichtig ist, und für außerordentliche Photonen auch bei großen Winkeln. In diesen Winkelbereichen laufen die Kurven für die Eindringtiefe und die Intensität in entgegengesetzte Richtungen. Die Zeichnung 14c zeigt außerdem, daß die ordentlichen Photonen den Hauptbeitrag zum Fluß leisten, da nur sie mit nennenswertem Wirkungsquerschnitt produziert werden. Dagegen kam im optisch dicken Fall (Fig. 14b) der Hauptbeitrag von den außerordentlichen Photonen - wegen ihrer großen freien Weglänge. Mit diesen zwei "Grundregeln", $I(\vartheta) \propto \text{const} + \cos \vartheta / \kappa(\vartheta)$ im optisch dicken, und $I(\vartheta) \propto \kappa(\vartheta) / \cos \vartheta$ im optisch dünnen Fall, lassen sich unsere Ergebnisse zusammenfassen. Die Anisotropie des Strahlungsfelds läßt sich aus der Winkelabhängigkeit des Extinktionskoeffizienten $\kappa(\vartheta)$ ableiten.

Der wichtigste Einfluß des starken Magnetfelds besteht in der Herabsetzung der Wirkungsquerschnitte für Photonen, die sich parallel zum Feld ausbreiten (Canuto et al. 1971). Mit der Erhöhung der freien Weglänge für $\vartheta \approx 0$ ist im optisch dicken Fall ein scharfes Maximum der Intensität verbunden. Die Strahlung verläßt die Schicht also relativ gut gebündelt, etwa wie das von einem Scheinwerfer ausgehende Licht. Die Schicht wird bei abnehmender optischer Dicke zuerst für Strahlung entlang des Magnetfelds durchsichtig. Dies führt dann zu einem tiefen Minimum der Intensität, da wegen der niedrigen Wirkungsquerschnitte nur wenige Photonen in die Richtung $\vartheta \approx 0$ emittiert oder gestreut werden. Das Richtdiagramm hat dann die Form eines relativ engen, hohlen Kegels. Ein solches Diagramm wurde bereits von Basko (1976) gefunden. Der von ihm betrachtete Fall - Variation der Quellfunktion mit $e^{-\tau/\tau_0}$ - ähnelt unseren homogenen Medien insofern, als Strahlung nur in einer endlichen

Schicht erzeugt wird, die in Richtung $\vartheta = 0$ durchsichtig ist.

Es ist wichtig, daß die beiden diskutierten Fälle bei ein und derselben Schicht verwirklicht sein können. Da die Streuquerschnitte für $\vartheta = 0$ mit $(\omega / \omega_c)^2$ abnehmen, kann eine Schicht z.B. bei $\omega = \frac{1}{2} \omega_c$ optisch dick, und bei $\omega = \frac{1}{10} \omega_c$ optisch dünn sein. Die Richtcharakteristik sollte von einem Vollkegel bei höheren Frequenzen zu einem Hohlkegel bei niedrigeren Frequenzen übergehen.

Auf eine andere frequenzabhängige Besonderheit der Richtdiagramme hat zuerst Kanno (1980) hingewiesen: der Fluß in eine bestimmte Richtung (Photonen/sec/ster) kann bei einer optisch dicken Atmosphäre neben dem Maximum bei $\vartheta = 0$ auch ein zweites Maximum bei etwa 40° aufweisen. In Kanno's Modell tritt diese Doppelstruktur bei Frequenzen unterhalb von $\frac{1}{10} \omega_c$ auf. Das Nebenmaximum geht auf außerordentliche Photonen zurück, die bei Frequenzen weit unterhalb der Zyklotronfrequenz und großen Winkeln weitgehend linear polarisiert sind ($E_{\text{Welle}} \perp B$) und große freie Weglängen haben. Andeutungsweise sieht man dieses zweite Maximum schon in Fig. 14b, wobei allerdings zu beachten ist, daß dort die Intensität $I(\vartheta)$, und nicht der Strahlungsstrom, $F(\vartheta) = I(\vartheta) \cos \vartheta$, aufgetragen ist. Wegen der Multiplikation mit dem Faktor $\cos \vartheta$ ist das Nebenmaximum nur schwach ausgeprägt. Außerdem ist in unserem Modell, das Absorption und Emission von Photonen berücksichtigt, die Anisotropie der Strahlung nicht so stark wie in dem von Kanno, der nur die Streuung von Photonen betrachtet. Das liegt daran, daß wir mit einem isothermen Modell arbeiten. Die thermische Emission liefert einen von der Tiefe unabhängigen Beitrag zur Quellfunktion. Auch die Beiträge der

Streuung zur Quellfunktion (Gl. 14) sind in großer Tiefe ortsunabhängig, weil die Photonendichten einen Sättigungswert (die Plancksche Photonendichte) erreichen. Die Eddington-Barbier-Beziehung bildet diese verringerte Tiefenabhängigkeit in eine kleinere Winkelabhängigkeit der Intensität ab.

Zu höheren Frequenzen hin ($\omega \gtrsim \frac{1}{2} \omega_c$) nimmt die Anisotropie der Wirkungsquerschnitte ab. Bei den numerischen Rechnungen zeigt sich eine entsprechend schwächere Anisotropie der entweichenden Strahlung. Die qualitative Übereinstimmung der mit der Diffusionsnäherung bestimmten Winkelverteilung (Abschnitt 5.1) mit den numerischen Ergebnissen wird noch besser. Die Unterschiede zwischen den beiden Methoden lassen sich zurückführen auf unterschiedliche Photonendichten, die sich aus beiden Verfahren ergeben. Eine bekannte Schwäche der Diffusionsgleichung ist, daß sie nahe der Oberfläche eine zu geringe Abhängigkeit der Photonendichte von der Tiefe liefert (Morse und Feshbach 1953). Aus der Marshak-Randbedingung (Pomraning 1973) folgt eine etwas zu hohe Photonendichte am Rand. Entsprechend wird die Intensität bei hohen Winkeln ($\vartheta \sim 90^\circ$) überschätzt. Dies ist in Zeichnung 14b bei den (kurzreichweitigen) ordentlichen Photonen zu sehen.

Bei optisch dünnen Schichten wird das Bild, das die Diffusionsnäherung zeichnet, wesentlich größer (Zeichnung 14c). Zwar stimmt die Winkelverteilung qualitativ mit der genaueren numerischen Rechnung überein, aber die Intensitäten sind systematisch um etwa 40% zu niedrig. Die Diffusionskonstante für ordentliche Photonen wird vor allem von den langreichweitigen Photonen bestimmt, die sich entlang des Magnetfelds ausbreiten. Im optisch dünnen Fall sind diese Photonen wegen ihrer kleinen

Wirkungsquerschnitte jedoch praktisch nicht vorhanden. Der Diffusionskoeffizient ist daher zu groß, und damit entweichen die Photonen im Diffusionsmodell zu schnell. Es folgt eine zu geringe Dichte von ordentlichen, und damit auch von außerordentlichen Photonen, da letztere meist durch Streuung aus den ordentlichen Photonen entstehen (vgl. Fig. 15).

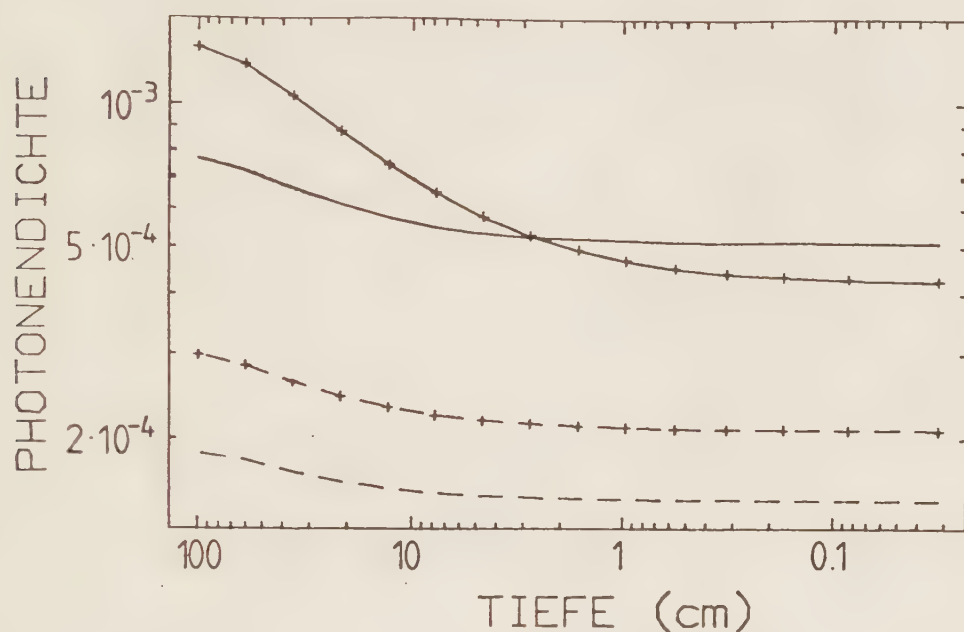


Abb. 15: Photonendichten (wieder bezogen auf die Gleichgewichtsdichte) im Innern der Schicht von Abb. 14c. Kreuze markieren die Photonendichten an den (Tiefen-) Stützstellen, die bei der Anwendung der Feautrier-Methode benutzt wurden. Die glatten Kurven zeigen die mit der Diffusionsnäherung berechneten Photonendichten. Durchgezogen: ordentliche Photonen, gestrichelt: außerordentliche Photonen.

Abb. 16 zeigt, wie die Winkelverteilung von der Dicke der Schicht abhängt. Die Frequenz der Strahlung liegt dabei weit unterhalb der Zyklotronfrequenz ($\omega_c/\omega = 20$), d.h. die Streuung ist sehr anisotrop.

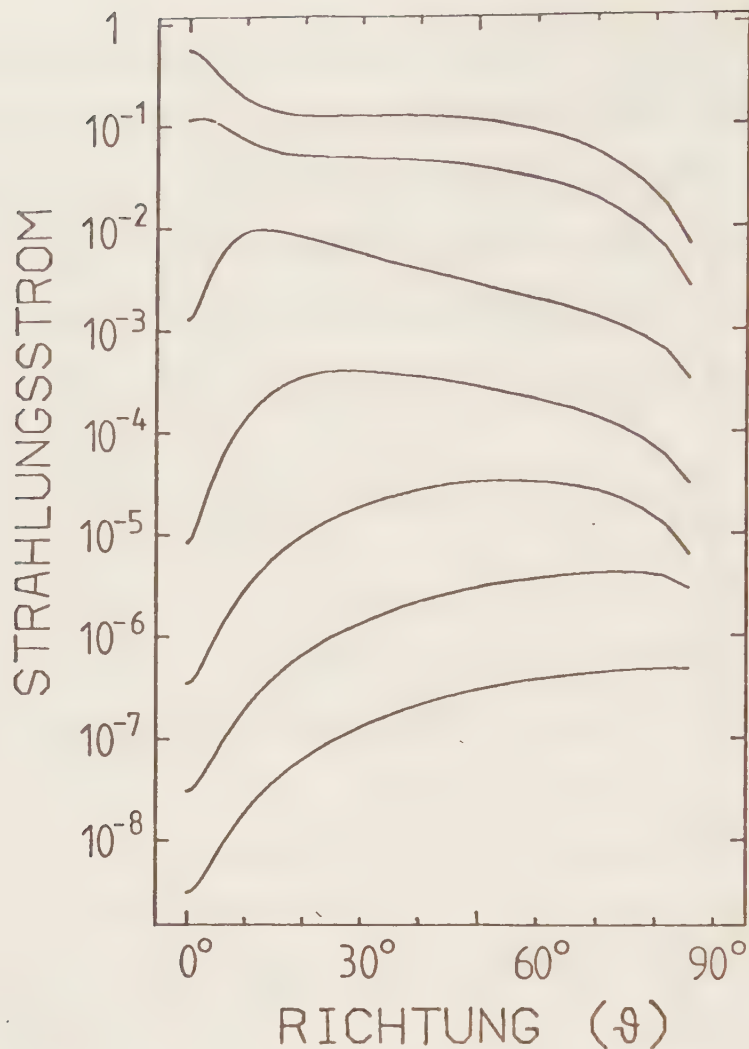


Abb. 16: Winkelabhängigkeit des Strahlungsstroms, $F(\vartheta) = I(\vartheta) \cos \vartheta$, aus Schichten verschiedener optischer Dicke. Plasma-Parameter: $\rho = 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$. Photonen-Energie 2.5 keV . Die Dicken der Schichten, in Thomson-Einheiten, sind 10^{-2} , 10^{-1} , ... 10^4 . Jede Kurve zeigt den entweichenden Strahlungsstrom von ordentlichen + außerordentlichen Photonen, berechnet mit Hilfe der Diffusionsnäherung, in Einheiten des senkrecht aus einer "schwarzen" Schicht entweichenden Strahlungsstroms.

Die unterste Kurve zeigt den Strahlungsstrom von einer sehr dünnen Schicht. Ihre Dicke, ausgedrückt in Einheiten der freien Weglänge für nicht-magnetische Thomson-Streuung, ist $\tau_{\text{Th}} = 10^{-2}$. Erwartungsgemäß zeigt diese Kurve einfach die Winkelabhängigkeit der frei-frei-Emissivität. Die oberste Kurve ($\tau_{\text{Th}} = 10^4$) fällt mit der für eine halb-unendliche Atmosphäre zusammen. Sie zeigt wie die Reflektivität ρ einer solchen Atmosphäre (genauer:

$(1-\rho)\cos\vartheta$) vom Einfallswinkel abhängt. Mit den gewählten Plasma- Parametern liegt die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Wechselwirkungsprozeß bei $5 \cdot 10^{-5}$. Da die Streuung überwiegt, sollte das Medium eine hohe Reflektivität haben. Wiederum zeigt sich, daß die Intensität selbst bei einer halb-unendlichen Atmosphäre deutlich unter der eines Schwarzen Körpers liegen kann (vgl. auch Felten und Rees 1972).

Auch für strahlende Säulen wurden Rechnungen durchgeführt; Abb. 17 zeigt zwei Beispiele:

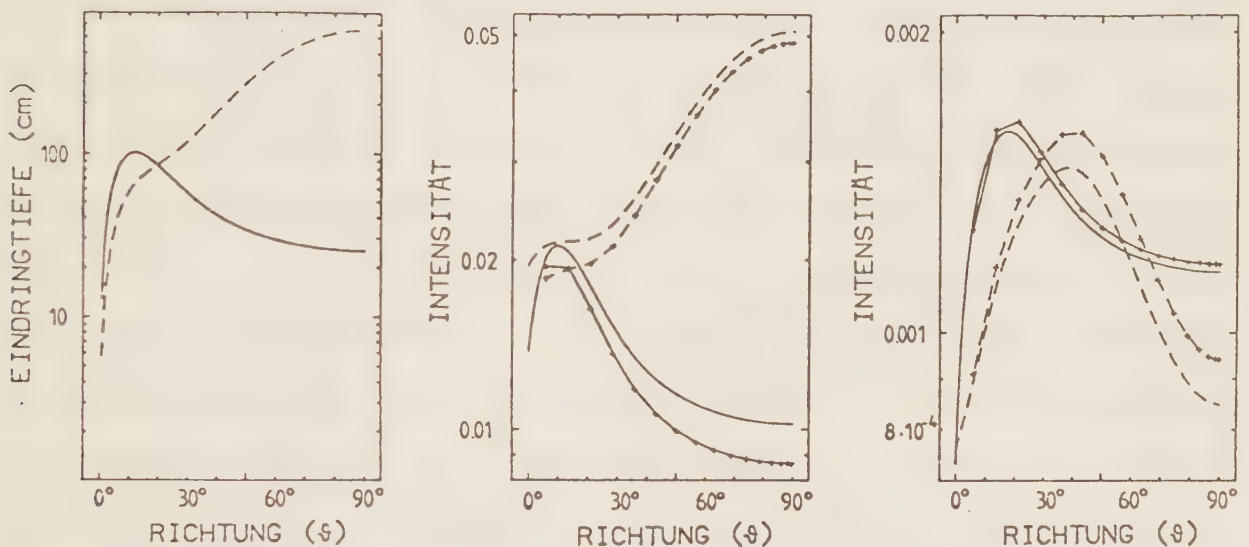


Abb. 17: Wie Zeichnung 14, aber für Zylinder-Geometrie.

- (a) Eindringtiefen, $\sin\vartheta / \kappa(\vartheta)$, für ordentliche und außerordentliche Photonen
- (b) Intensitäten $I(\vartheta)$ an der Oberfläche einer Säule mit dem Radius 10^4 cm.
- (c) Intensitäten bei einer Säule mit dem Radius 400 cm.

Die wichtigsten Ergebnisse lassen sich hier ebenfalls in zwei "Goldenen Regeln" zusammenfassen, mit dem einzigen Unterschied, daß der Faktor $\cos\vartheta$ durch $\sin\vartheta$ zu ersetzen ist: im optisch dicken Fall wächst die Intensität mit der Eindringtiefe, $I(\vartheta) \propto 2D + \sin\vartheta / \kappa(\vartheta)$, und im optisch dünnen Fall mit dem

Wirkungsquerschnitt, $I(\vartheta) \propto \kappa(\vartheta)/\sin\vartheta$. Weil der Faktor $\cos\vartheta$ durch $\sin\vartheta$ ersetzt ist, hängt die Eindringtiefe weniger stark vom Winkel ab - abgesehen von einem kleinen Raumwinkelbereich um $\vartheta \approx 0$ (vgl. die Zeichnungen 14a und 17a). Aus diesem Grund stimmt die Diffusionsnäherung mit den numerischen Ergebnissen besser überein als im Fall der Schichtgeometrie.

Da der Faktor $\sin\vartheta$ bei $\vartheta \approx 0$ sehr klein ist, macht sich die starke Anisotropie der Wirkungsquerschnitte bei $\vartheta \approx 0$ nicht so stark im abgestrahlten Fluß bemerkbar. Bei sehr dicken und sehr dünnen Säulen ist die Richtcharakteristik sehr weit aufgefächert, etwa wie bei einer Straßenlaterne. Der Strahlungsstrom ist maximal bei $\vartheta = 90^\circ$ und nimmt zu $\vartheta = 0^\circ$ bzw. 180° hin monoton ab. Nur bei Säulen mittlerer Dicke wird das Richtdiagramm etwas komplizierter: wenn die Säule für außerordentliche Photonen unter $\vartheta = \pi/2$ durchsichtig, aber unter $\vartheta = (\omega/\omega_0)^{\frac{1}{2}}$ - wo der Wirkungsquerschnitt ein Maximum hat - undurchsichtig ist. Der Strahlungsstrom ist dann nicht bei $\vartheta = \pi/2$ maximal, sondern in der Nähe des Winkels, wo der Übergang vom optisch dünnen zum optisch dicken Fall erfolgt. Das Richtdiagramm ähnelt dann einem Schmetterling. Die Flügelspitzen repräsentieren einen relativ scharf gebündelten Strahl von außerordentlichen Photonen, während zwischen den Flügeln ($\vartheta \sim \pi/2$) die ordentlichen Photonen überwiegen. Wenn der Durchmesser der Säule die freie Weglänge für außerordentliche Photonen (bei Ausbreitung unter $\vartheta \sim \pi/2$) übersteigt, dominieren diese bei allen Richtungen. Abb. 18 zeigt, wie sich die Richtcharakteristik mit dem Durchmesser der Säule ändert. Wie zu erwarten, repräsentiert die unterste Kurve wiederum die Winkelabhängigkeit der Emissivität und hat daher die gleiche Form wie die entsprechende Kurve für Schichtgeometrie.

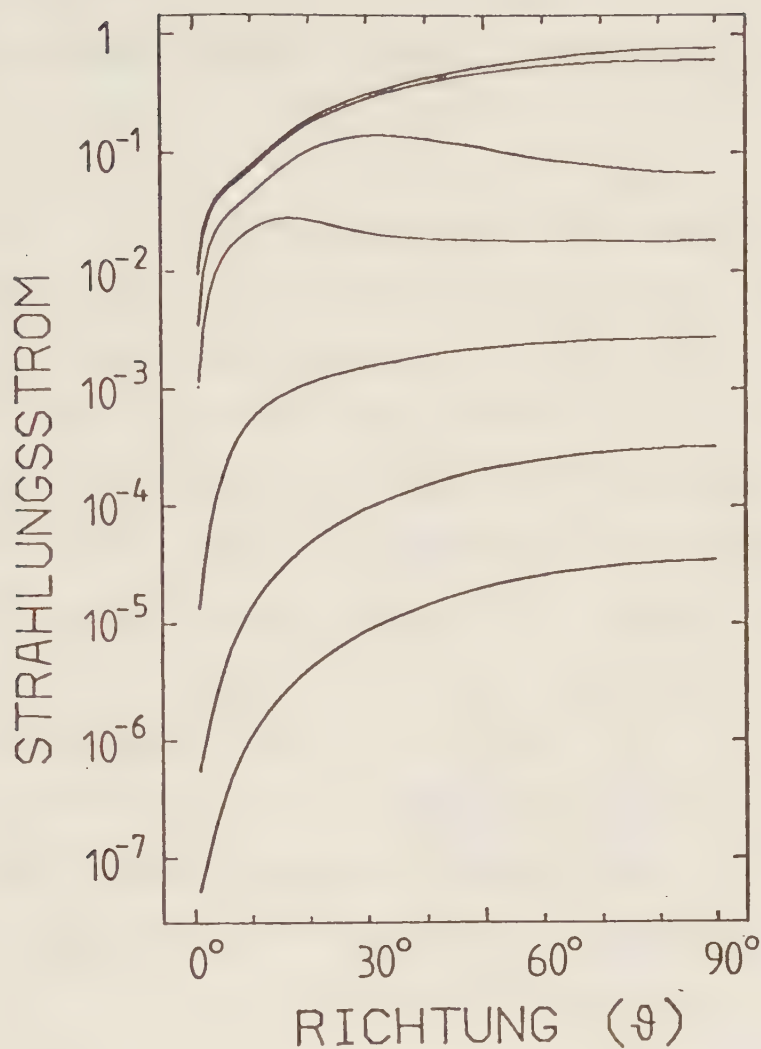


Abb. 18: Winkelabhängigkeit des Strahlungsstroms, $F(\vartheta) = I(\vartheta) \sin \vartheta$, aus Säulen verschiedener optischer Dicke. Plasma-Parameter: $\rho = 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$. Photonen-Energie: 1 keV . Die Durchmesser der Säulen, in Thomson-Einheiten, sind 10^{-1} , 1 , ... 10^5 . Wie in Abb. 16 wurden alle Kurven mit Hilfe der Diffusionsnäherung bestimmt.

6. DIE COMPTONISIERUNG VON PHOTONEN UND DIE BILDUNG VON ZYKLOTRON-LINIEN BEI FREQUENZ-UMVERTEILUNG

In den vorangegangenen Kapiteln hatten wir ignoriert, daß sich bei der Streuung die Frequenz eines Photons ändern kann. Tatsächlich beträgt die thermische Geschwindigkeit der Elektronen bei der angenommenen Temperatur von 10 keV etwa ein Siebtel der Lichtgeschwindigkeit. Aufgrund des Doppler-Effekts kann sich daher die Frequenz eines Photons bei einem einzigen Streuprozess um etwa 15% ändern. Bevor wir Aussagen über das Spektrum der entweichenden Photonen machen können, müssen wir die Energieverteilung der Photonen bei einem elementaren Streuprozess untersuchen, d.h. die Größe $d^2\sigma / d\omega d\Omega$ berechnen. Es stellt sich heraus, daß diese Größe einfacher zu berechnen ist als $d\sigma / d\Omega$, und daß wir die Diskussion des Streuquerschnitts im 2. Kapitel nur geringfügig zu erweitern haben.

6.1. Der differentielle Wirkungsquerschnitt

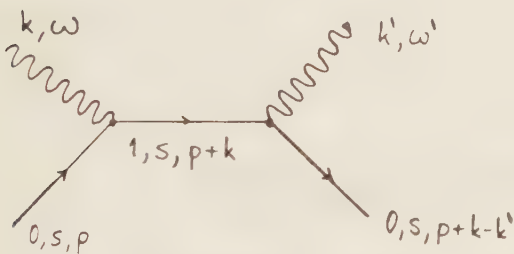
In Kapitel 2 hatten wir bei der Berechnung des Streuquerschnitts eine Reihe von vereinfachenden Annahmen gemacht: (1) daß die nicht-relativistische Quantenmechanik und (2) die Dipolnäherung gelten, (3) daß Anfangs- und Endzustände des streuenden Elektrons im Landau-Grundzustand ($n=n'=0$) liegen, und (4) daß die Elektronen ruhen ($p=0$). Von der letzteren Annahme müssen wir jetzt abrücken; wir werden eine eindimensionale Maxwell-Verteilung zugrunde legen,

$$f(p) = (2\pi m k_B T_{||})^{-\frac{1}{2}} \exp(-p^2 / 2 m k_B T_{||})$$

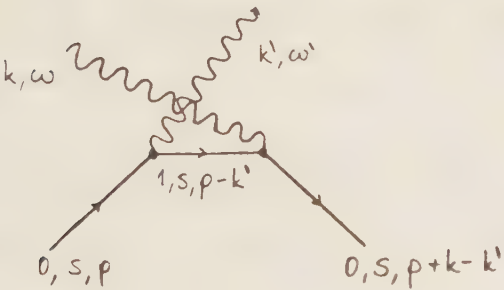
Die Streuamplitude hängt vom Impuls p des Elektrons (in

Magnetfeld- Richtung) ab. Bei ihrer Berechnung muß auch die Annahme (2) eingeschränkt werden: statt $e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx 1$ werden wir $e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx e^{ik_z z}$ setzen. Auf diese Weise stellen die Matrixelemente die Impulserhaltung in z-Richtung sicher. Damit wird auch der Rückstoß, den das Elektron bei der Streuung erfährt (Compton-Effekt), wenigstens in nichtrelativistischer Näherung berücksichtigt (vgl. Kirk 1980).

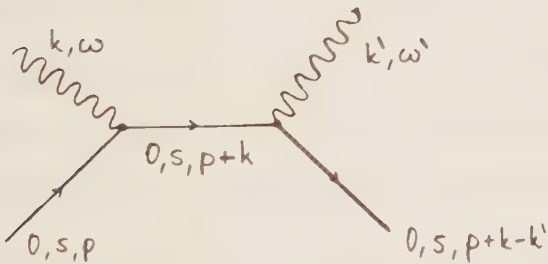
Mit diesen Korrekturen ergeben sich die folgenden Beiträge zur Streuamplitude (wir setzen der Übersichtlichkeit halber $\hbar=c=m=1$):



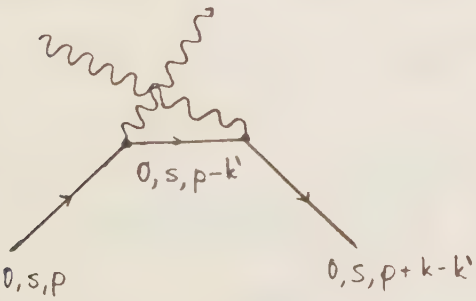
$$\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega\omega'}L^3} \frac{\sqrt{\omega_c}\sqrt{\omega_c}}{\frac{1}{2}p^2+\omega-\omega_c-\frac{1}{2}(p+k)^2} e_- e_-^{1*}$$



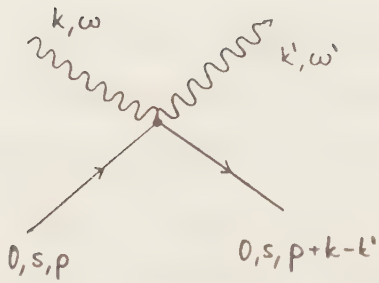
$$\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega\omega'}L^3} \frac{\sqrt{\omega_c}\sqrt{\omega_c}}{\frac{1}{2}p^2+\omega-\omega_c-\frac{1}{2}(p-k')^2-\omega-\omega'} e_+ e_+^{1*}$$



$$\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega\omega'}L^3} \frac{(p+\frac{k}{2})(p+k-\frac{k'}{2})}{\frac{1}{2}p^2+\omega-\frac{1}{2}(p+k)^2} e_z e_z^{1*}$$



$$\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega\omega'}L^3} \frac{(p-\frac{k'}{2})(p-k'+\frac{k}{2})}{\frac{1}{2}p^2+\omega-\frac{1}{2}(p-k')^2-\omega-\omega'} e_z e_z^{1*}$$



$$\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega\omega'} L^3} (e_+^* e_+ + e_-^* e_- + e_z^* e_z)$$

In Analogie zu den Formeln in Abschnitt 2.3 läßt sich daher das Übergangs- Matrixelement für ein Elektron mit dem Anfangsimpuls p schreiben in der Form

$$\langle f | T | i \rangle = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega\omega'} L^3} \langle e' | \Pi | e \rangle = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega\omega'} L^3} (\Pi_+ e_+^* e_+ + \Pi_- e_-^* e_- + \Pi_z e_z^* e_z) \quad (2)$$

mit

$$\begin{aligned} \Pi_+ &= 1 - \frac{\omega_c}{\omega' + \omega_c - p k' + k'^2/2} \\ \Pi_- &= 1 + \frac{\omega_c}{\omega - \omega_c - p k - k^2/2} \\ \Pi_z &= 1 + \frac{(p+k/2)(p+k-k'/2)}{\omega - p k - k^2/2} - \frac{(p-k'/2)(p-k'+k/2)}{\omega' - p k' + k'^2/2} \end{aligned} \quad (3)$$

(Kirk und Mészáros [1980], man beachte den Druckfehler in dem Ausdruck für Π_z .)

Statt über die Energie des gestreuten Photons zu integrieren - was in Gl. (2.21) zum Zustandsdichte- Faktor führt - schreiben wir die Streurrate in der Form

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | T | i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f) &= \\ &= \frac{\alpha^2 \hbar^2 \omega'}{m^2 c L^3 \omega} |\langle e' | \Pi | e \rangle|^2 \delta(\omega + \Delta\omega - \omega') \end{aligned} \quad (4)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann, gemittelt über die Elektronenimpulse p ,

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega'}{\omega} \int dp f(p) |\langle e' | \Pi | e \rangle|^2 \delta(\omega + \Delta\omega - \omega') \quad (5)$$

Hierbei ist $\hbar\Delta\omega = (p^2 - p'^2)/2m$ die Energie, die das Photon von dem Elektron aufnimmt. Impulserhaltung legt den Endimpuls p' des Elektrons fest:

$$p - p' = \hbar \Delta k = \frac{\hbar\omega'}{c} \cos \vartheta' - \frac{\hbar\omega}{c} \cos \vartheta \quad (6)$$

und damit

$$\Delta\omega = \Delta k \frac{p}{m} - \frac{\hbar (\Delta k)^2}{2m} \quad (7)$$

Aufgrund der Kinematik des Streuprozesses ist bei vorgegebenem Anfangsimpuls des Elektrons (p) und den Photonenparametern $\omega, \vartheta, \vartheta'$ die Frequenz des gestreuten Photons festgelegt: $\omega' = \omega + \Delta\omega$. Umgekehrt gibt es zu vorgegebenem Anfangs- und Endzustand des Photons ($\omega, \vartheta, \omega', \vartheta'$) nur einen Anfangsimpuls p_0 des Elektrons, so daß Impuls- und Energie- Erhaltung gelten:

$$p_0 = m \frac{\Delta\omega}{\Delta k} + \frac{1}{2} \hbar \Delta k \quad (8)$$

Die "Mittelung" über die verschiedenen Impulse p wird dadurch sehr einfach,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} &= r_0^2 \frac{\omega'}{\omega} \int dp f(p) |\langle e' | \Pi | e \rangle|^2 \delta(\omega + \Delta\omega - \omega') \\ &= r_0^2 \frac{\omega'}{\omega} \frac{m}{|\Delta k|} f(p_0) |\langle e' | \Pi(p_0) | e \rangle|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Das Spektrum der gestreuten Photonen wird in erster Linie von der Verteilungsfunktion $f(p)$ der Elektronen bestimmt. Daneben macht sich aber auch die Zyklotronresonanz bemerkbar. Das Spektrum spiegelt nicht nur die Häufigkeit von Elektronen mit dem Impuls $p=p_0(\omega, \vartheta, \omega', \vartheta')$ wieder, sondern auch ihre Wahrscheinlichkeit, das einfallende Photon zu streuen. Die Streuwahrscheinlichkeit ist natürlich besonders groß, wenn in dem Bezugssystem des Elektrons die einfallende Welle eine solche Doppler- Verschiebung erfährt, daß ihre Frequenz mit der Zyklotronfrequenz übereinstimmt. Als Beispiel zeigt Abb. 19 das Spektrum gestreuter außerordentlicher Photonen in einem Plasma der Temperatur 10 keV, in vier verschiedenen Richtungen, $\vartheta'=20^\circ, 70^\circ, 120^\circ$ und 160° (relativ zum Magnetfeld). Die Richtung des einfallenden Quants wurde zu $\vartheta=45^\circ$ angenommen und seine Energie zu 40 keV, 10 keV unterhalb der Zyklotronenergie.

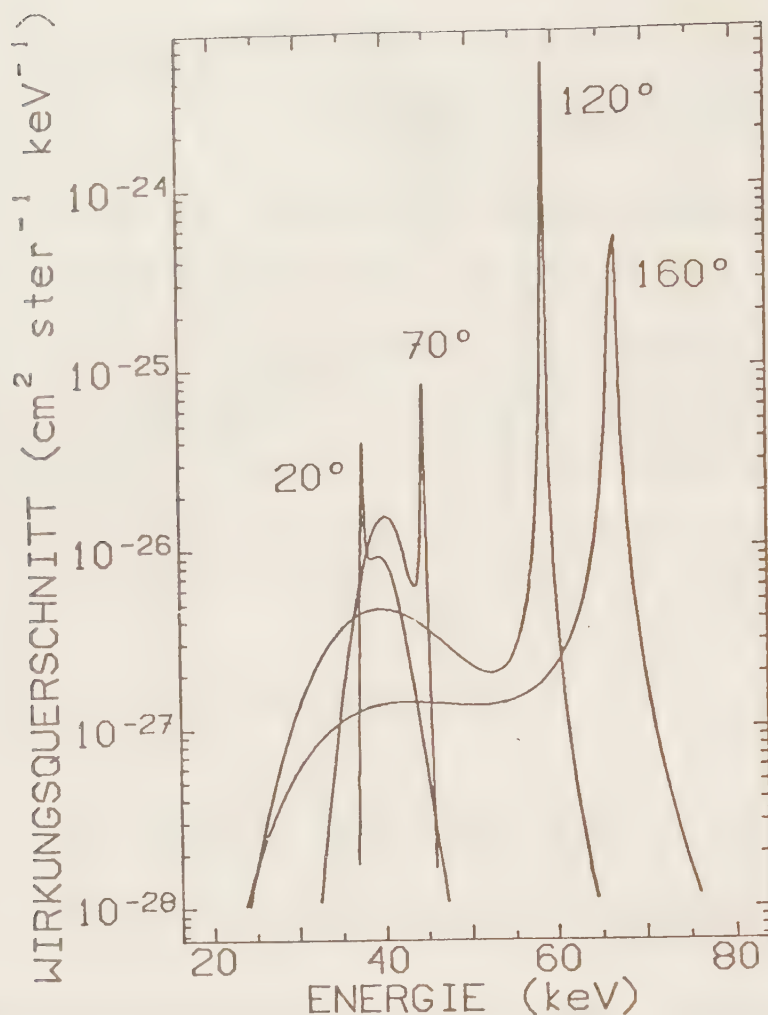


Abb. 19: Der differentielle Streuquerschnitt, $d^2\sigma/d\omega d\Omega$, für Streuung eines Photons von der ordentlichen in die außerordentliche Polarisation, als Funktion der Energie des gestreuten Photons. Die Plasma-Temperatur ist 10 keV; die Zyklotron-Frequenz liegt bei 50 keV. Das einfallende Photon fliegt in Richtung $\vartheta=45^\circ$ (in Bezug auf das Magnetfeld) und hat eine Energie von 40 keV. Die vier Kurven zeigen das Spektrum der gestreuten außerordentlichen Photonen in den Richtungen $\vartheta'=20^\circ$, 70° , 120° und 160° .

Auf der Flanke einer ziemlich breiten Gauß-Kurve (ein Abbild der Maxwell-Verteilung) liegt eine ziemlich scharfe Spitze. Ihre Schärfe beruht darauf, daß nur Elektronen mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit in Resonanz mit der einfallenden Welle sind. Die re-emittierte Zyklotronstrahlung ($\hbar\omega=50$ keV im System des Elektrons) erfährt je nach Beobachtungsrichtung (ϑ') eine unterschiedliche Doppler-Verschiebung.

Aus der Form (9) ist ersichtlich, daß der Wirkungsquerschnitt für $\Delta\omega=0$ (Annahme kohärenter Streuung) wieder in den früher benutzten Ausdruck übergeht,

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = r_0^2 |\langle e' | \pi | e \rangle|^2 \delta(\omega' - \omega) \quad (10)$$

Eine andere wichtige Eigenschaft ist die Symmetriebeziehung (vgl. z.B. Cooper 1971)

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} (\omega' \vartheta' \leftarrow \omega \vartheta) = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \exp\left(\frac{\hbar\omega - \hbar\omega'}{k_B T}\right) \frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} (\omega \vartheta \leftarrow \omega' \vartheta') \quad (11)$$

die man aus Gl. (9) leicht verifiziert. Das Matrixelement $\langle e' | \pi | e \rangle$ ist symmetrisch bezüglich Vertauschung der Anfangs- und Endzustände. Der zusätzliche Faktor $(\omega' / \omega)^2$ kommt von dem Verhältnis der Dichte der Endzustände, und $\exp \frac{\hbar\omega - \hbar\omega'}{k_B T} = f(p') / f(p)$ von der unterschiedlichen Besetzung der elektronischen Anfangszustände. Von Bedeutung ist die Symmetriebeziehung für das Gleichgewichtsspektrum, das sich nach einer großen Zahl von Streuprozessen einstellt. Aus (11) läßt sich ablesen, daß ein Wien-Spektrum,

$$\bar{n}(\omega) \propto \omega^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \quad (12)$$

bei der Streuung unverändert bleibt, da pro Zeiteinheit genau so viele Photonen von ω nach ω' gestreut werden wie umgekehrt: "detailliertes Gleichgewicht". Diese Feststellung gilt, solange stimulierte Streuung vernachlässigt werden kann.

Die Polarisationsmoden sollten konsistent mit den Matrixelementen $\pi_{+,-,z}$ berechnet werden, d.h. in die Formeln sind die Polarisationsvektoren für ein heißes Plasma, unter Berücksichtigung von Quantenkorrekturen, einzusetzen (Kirk 1980). Dazu brauchen wir die oben abgeleiteten Streuamplituden nur auf den Fall der Vorwärtsstreuung, $\omega' = \omega$, $\vartheta' = \vartheta$ zu spezialisieren und in die Ausdrücke (2.54) aus Kapitel 2.5 einzusetzen. Zur

Vorwärts- Streuamplitude tragen alle Elektronen bei, da Energie- und Impulserhaltungssatz mit $p^{\lambda} = p$ immer erfüllt sind. Man hat also

$$\begin{aligned}\pi_+ &= \int dp f(p) \frac{\omega - kp + k^2/2}{\omega + \omega_c - kp + k^2/2 + i\gamma} \\ \pi_- &= \int dp f(p) \frac{\omega - kp - k^2/2}{\omega - \omega_c - kp - k^2/2 + i\gamma} \\ \pi_z &= \int dp f(p) \frac{\omega}{k} \left(\frac{p + k/2}{\omega - kp - k^2/2 + i\gamma} - \frac{p - k/2}{\omega - kp + k^2/2 + i\gamma} \right)\end{aligned}\quad (13)$$

Um die Konvergenz der Integrale sicherzustellen, muß die Strahlungs- Dämpfung berücksichtigt werden, $\gamma = 2e^2 \omega^2 / 3mc^3$. Damit die Komponenten $\pi_{+,-,z}$ des Polarisationsensors die Kramers- Kronig- Beziehungen erfüllen (Ziman 1972), müssen die Pole in die untere Hälfte der komplexen Zahlenebene fallen ($\text{Im } \omega < 0$). Wenn für die Verteilungsfunktion $f(p)$ eine eindimensionale Maxwell- Verteilung angenommen wird, lassen sich die Integrale durch die sogenannte Plasma- Dispersions- Funktion (Fried und Conte 1961) ausdrücken:

$$\begin{aligned}\pi_+ &= 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega_c + i\gamma}{\Delta\omega} w\left(\frac{\omega + \omega_c + k^2/2 + i\gamma}{\Delta\omega}\right) \\ \pi_- &= 1 - i\sqrt{\pi} \frac{\omega_c - i\gamma}{\Delta\omega} w\left(\frac{\omega - \omega_c - k^2/2 + i\gamma}{\Delta\omega}\right) \\ \pi_z &= -i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k^2} \frac{\omega + i\gamma}{\Delta\omega} \left[w\left(\frac{\omega - k^2/2 + i\gamma}{\Delta\omega}\right) - w\left(\frac{\omega + k^2/2 + i\gamma}{\Delta\omega}\right) \right]\end{aligned}\quad (14)$$

mit $\Delta\omega = \omega |\cos \theta| (2kT/m)^{\frac{1}{2}}$ (Kirk 1980). Es gibt rationelle Methoden zur numerischen Berechnung dieser Funktion für komplexes Argument (Hui et al. 1978; Humlíček 1979). Am stärksten macht sich die Doppler- Verbreiterung natürlich bei dem Term π_- bemerkbar. Formel (14) liefert bei $\omega \approx \omega_c$ einen wesentlich kleineren Wert als die kalte- Plasma- Näherung, wonach $\pi_- \approx \omega / (\omega - \omega_c + i\gamma)$ wäre. Demzufolge weichen die Polarisationsmoden in der Nähe der Zyklotronresonanz deutlich von denen eines kalten Plasmas ab. Insbesondere ist der Imaginärteil von

$$\xi = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\pi_+ - \pi_-}{2\pi_z - \pi_+ - \pi_-} \quad (15)$$

nicht mehr vernachlässigbar gegen den Realteil. Aus diesem Grund sind die Moden nicht orthogonal, was dazu führt, daß die Polarisations- Komponente e_- auch für die ordentlichen Wellen bei $\omega = \omega_c$ von Null verschieden ist. Dadurch macht sich die Resonanz in π_- auch im Streuquerschnitt der ordentlichen Photonen bemerkbar, vgl. Zeichnung 20. Die Resonanz ist aber wesentlich schwächer als für die außerordentlichen Photonen. In den Richtungen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ sind die Moden immer orthogonal;

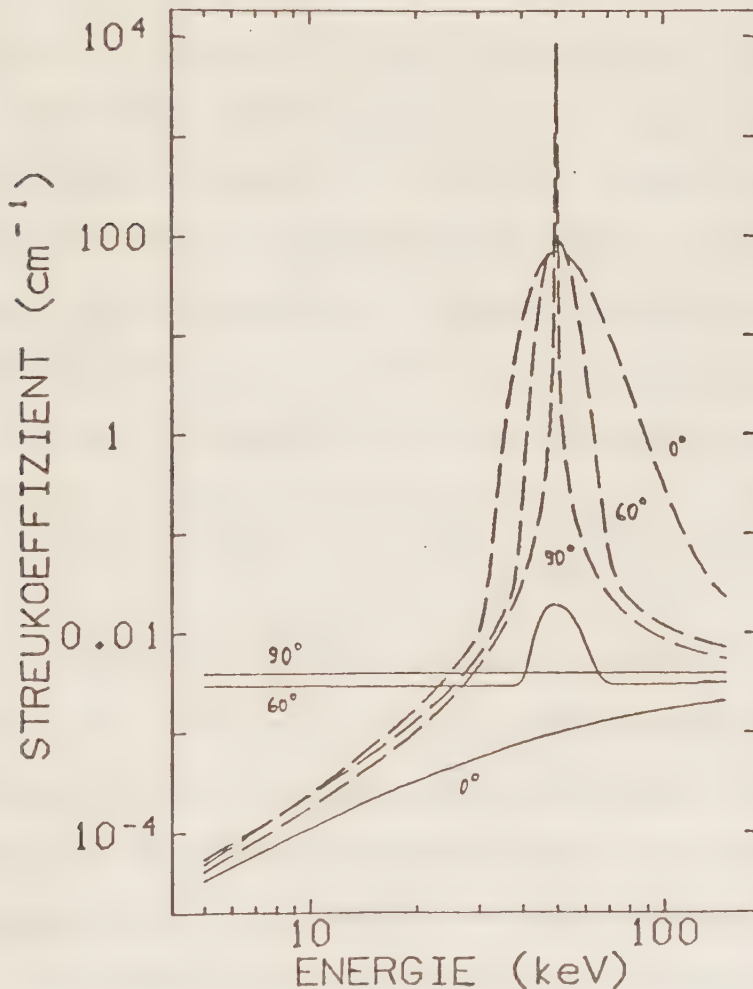


Abb. 20: Der gesamte Streukoeffizient in einem heißen, stark magnetisierten Plasma ($\rho = 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$). Als Funktion der Energie sind die Streukoeffizienten für ordentliche (durchgezogen) und außerordentliche Photonen (gestrichelt) aufgetragen, jeweils für die Ausbreitungsrichtungen $\vartheta = 0^\circ$, 60° und 90° .

für diese Richtungen ist der Wirkungsquerschnitt der ordentlichen Photonen daher praktisch frequenzunabhängig wie im Fall des kalten Plasmas. Es bleibt anzufügen, daß der Gesamt-Streuquerschnitt nicht durch Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitts berechnet wurde, sondern aus dem optischen Theorem (Kanno und Hamada 1975, Ventura 1979):

$$\sigma = -4\pi r_0 \frac{c}{\omega} \left(\text{Im } \Pi_+ |e_+|^2 + \text{Im } \Pi_- |e_-|^2 + \text{Im } \Pi_z |e_z|^2 \right). \quad (16)$$

6.2. Anwendung der Feautrier-Methode

Im Prinzip läßt sich die frequenz-, richtungs- und polarisationsabhängige Strahlungstransportgleichung (3.17) genauso einfach lösen wie die richtungsabhängige Gleichung im vorigen Kapitel. Die Quellfunktion wird durch eine Quadratursumme über Frequenzen, Richtungen und Polarisationen ersetzt, und das resultierende System von Diffusionsgleichungen dann nach dem im Abschnitt 5.3 beschriebenen Verfahren gelöst. Bei der praktischen Rechnung sind jedoch einige Vereinfachungen unvermeidlich. Sie bringen es mit sich, daß man statt der Lösung von (3.17) die Lösung einer etwas modifizierten Gleichung erhält.

Bei der Feautrier-Methode wächst der Rechenaufwand sehr schnell mit der Zahl der gekoppelten Diffusionsgleichungen ($\propto N^3$). Wenn man die Winkelabhängigkeit des Strahlungsfelds mit derselben Genauigkeit wie im Kapitel 5, und zusätzlich die Kopplung zwischen, sagen wir, 20 verschiedenen Frequenzen berücksichtigen wollte, müßte man eine um den Faktor $20^3 = 8000$ höhere Rechenzeit in Kauf nehmen. Um den Rechenaufwand zu begrenzen, erscheint es daher ratsam, über die Richtungen gemittelte Wirkungsquerschnitte zu verwenden, z.B.

$$\frac{d\sigma}{d\omega}(\omega' \leftarrow \omega) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int d\Omega' \frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega}(\omega' \vartheta' \varphi' \leftarrow \omega \vartheta \varphi) \quad (17)$$

Die winkelabhängige Resonanz in $d^2\sigma/d\omega d\Omega$ (s. Zeichnung 19) erschwert jedoch die numerische Integration erheblich. Für die ähnliche, aber etwas einfachere Umverteilungsfunktion $R_{II,A}$ (in der Notation von Hummer [1962]) haben Adams, Hummer und Rybicki (1971) eine effiziente Berechnungsmethode ersonnen. Etwas Ähnliches wäre für das Doppelintegral (17) erforderlich. Weil die Mittelung über die Winkel ohnehin nur eine Näherung darstellt, verzichten wir auf die Integration und stellen das Strahlungsfeld lediglich durch zwei Bündel mit den Richtungen 60° und 120° dar. Statt der im letzten Kapitel verwendeten 16-Punkte Gauß-Quadratur benutzen wir also eine "Gauß-Quadratur" mit nur einer Stützstelle, $\cos\vartheta = 1/2$. Dieses Verfahren hat eine lange Tradition in der Strahlungstransporttheorie; erstmals wurde es von Schuster und Schwarzschild benutzt (Sobolev 1963). Obwohl es natürlich nicht die exakte Lösung der Transportgleichung liefert, sollte es doch ihre wesentlichen Züge richtig wiedergeben.

Da in der Transportgleichung (3.17) stimulierte Streuung vernachlässigt ist, liefert sie nicht das richtige Gleichgewichtsspektrum (das Planck-Spektrum). Wenn Absorption und Emission von Photonen keine Rolle spielen, ergibt sich stattdessen ein Wien-Spektrum, d.h. das Gleichgewichtsspektrum für klassische Teilchen. Umgekehrt, wenn keine Streuung stattfindet, führen Absorption und Emission dazu, daß sich ein Planck-Spektrum einstellt. Ein einheitliches Gleichgewichtsspektrum läßt sich nur erreichen, wenn man die Kirchhoffsche Beziehung modifiziert. Wir setzen für die Emissivität $j_\nu = \alpha W_\nu$, wobei $W_\nu = (h\nu^3/c^2) e^{-h\nu/k_B T}$ das Wien-Spektrum und α der frei-frei-Absorptionskoeffizient ohne den

Faktor $(1 - e^{-h\nu/k_B T})$ ist. Dieser Faktor drückt aus, daß Absorption durch stimulierte Emission teilweise kompensiert wird. Es ist nur konsequent, wenn wir neben der stimulierten Streuung auch die stimulierte Emission außer acht lassen. Die Änderung, die wir an der Kirchhoffschen Beziehung vornehmen, wirkt sich nur bei tiefen Frequenzen ($h\nu \ll k_B T$) stark aus, wo der Korrekturfaktor $(1 - e^{-h\nu/k_B T}) \approx \frac{h\nu}{k_B T}$ erheblich von 1 abweicht.

Mit der Schuster-Schwarzschild-Näherung schreiben wir die Transportgleichung in der Form (für Schichtgeometrie, Gl. 3.11)

$$\frac{1}{4\kappa_i(\omega)} \frac{d^2 u_i(\omega)}{dr^2} - \kappa_i(\omega) u_i(\omega) + \alpha_i(\omega) W_\omega + \sum_{j=1,2} \int d\omega' \frac{d\sigma_{ij}}{d\omega}(\omega + \omega') \frac{\omega}{\omega'} u_j(\omega') = 0 \quad (18)$$

Hier haben wir auch vorausgesetzt, daß Streuung in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung gleich wahrscheinlich ist. Andernfalls müßte in Gleichung (18) noch eine erste Ableitung (du/dr) auftreten. Bevor wir Frequenz-Stützstellen einführen und die Transportgleichung dadurch diskretisieren, ist es sinnvoll, ω und u durch andere Variablen zu ersetzen. Statt der Frequenz ω benutzen wir $f = \ln \omega$, und transformieren entsprechend $\omega \frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{d\sigma}{df}$. An Stelle der Intensität $u_j(\omega)$ führen wir $p_j(\omega) = u_j(\omega)/W_\omega$ ein, beziehen die Intensität also immer auf den Gleichgewichtswert (Wien-Spektrum). $p_j(\omega, r)$ läßt sich interpretieren als Thermalisierungswahrscheinlichkeit, das ist die Wahrscheinlichkeit für ein am Ort r mit der Frequenz ω und Polarisation j erzeugtes Photon, nach einer beliebigen Zahl von Streuprozessen absorbiert zu werden. Da ein Photon entweder entweicht oder reabsorbiert wird, addieren sich Entweich- und Thermalisierungswahrscheinlichkeit zu 1. Für die Thermalisierungswahrscheinlichkeit erhält man die zu (18) adjungierte Gleichung

$$\frac{1}{4\kappa_i} \frac{d^2 p_i(f)}{dr^2} - \kappa_i p_i(f) + \sum_{j=1,2} \int df' \frac{d\sigma_{ji}}{df}(f' \leftarrow f) p_j(f') + \alpha_i = 0 \quad , \quad (19)$$

wobei wir vom Prinzip des detaillierten Gleichgewichts (11) Gebrauch gemacht haben. Auf diese Gleichung wenden wir jetzt das Diskretisierungsverfahren an und gewinnen Gleichungen der Form

$$D_i \frac{d^2 p_i}{dr^2} - K_i p_i + \sum_{j=1}^N S_{ij} p_j + A_i = 0 \quad , \quad i=1, \dots, N \quad (20)$$

Die Indizes i und j sollen jetzt sowohl die Frequenz als auch die Polarisations kennzeichnen. Bei den meisten Rechnungen wurden die in der Tabelle angegebenen 32 Frequenz- Stützstellen benutzt (N=64). Auf der logarithmischen Skala (f=ln ω) sind die Stützstellen im Kontinuum ungefähr gleichverteilt, und nur in der Nähe der Zyklotronfrequenz sind sie etwas dichter gesetzt.

$h\nu_i / \text{keV}$	f_i	$h\nu_i / \text{keV}$	f_i
1.0000	0.0000	29.725	3.3920
1.2723	0.2408	33.476	3.5108
1.6172	0.4807	37.103	3.6137
2.0533	0.7194	40.604	3.7039
2.6034	0.9568	44.037	3.7850
3.2954	1.1925	47.498	3.8607
4.1627	1.4262	51.117	3.9341
5.2444	1.6572	55.064	4.0085
6.5850	1.8848	59.565	4.0871
8.2326	2.1081	64.926	4.1732
10.235	2.3258	71.568	4.2706
12.631	2.5361	80.061	4.3828
15.440	2.7369	91.147	4.5125
18.644	2.9255	105.74	4.6610
22.175	3.0990	124.93	4.8277
25.916	3.2549	150.00	5.0106

Besondere Sorgfalt muß auf die Berechnung der Umverteilungsmatrix S verwendet werden. S_{ij} / K_i beschreibt die Wahrscheinlichkeit der Streuung von Polarisations- / Frequenz- Kanal i nach Kanal j. Diese Koeffizienten hängen davon ab, was für eine Quadraturformel für die Ersetzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} df' \frac{d\sigma}{df}(f' \leftarrow f) p(f') \rightarrow \sum_j S_{ij} p_j \quad (21)$$

gewählt wird. Leider gibt es dafür kein "Standard-Rezept" wie die Gauß-Quadratur im Fall der Integration über die Richtungen. Zwischen den Stützstellen f_j muß die Thermalisierungswahrscheinlichkeit interpoliert werden – meist wird lineare oder Spline-Interpolation benutzt (Adams, Hummer und Rybicki 1971):

$$p(f) \approx \sum_j \Psi_j(f) p_j, \quad p_j = p(f_j) \quad (22)$$

Die Funktionen Ψ_j sind stückweise Polynome, die bestimmte Stetigkeitsbedingungen sowie $\Psi_j(f_i) = \delta_{ij}$ erfüllen. Spline-Interpolation hat den Vorteil höherer Genauigkeit, aber erfordert sehr sorgfältig (nicht zu weit) gesetzte Stützstellen, um "Überschwingen" zu vermeiden. Um die Stabilität des Gleichungssystems (20) sicherzustellen, wurde daher meist mit linearer Interpolation gearbeitet, d.h.

$$\Psi_j(f) = \begin{cases} \frac{f - f_{j-1}}{f_j - f_{j-1}}, & f_{j-1} \leq f \leq f_j \\ \frac{f_{j+1} - f}{f_{j+1} - f_j}, & f_j \leq f \leq f_{j+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (23)$$

Am Rand, $f \leq f_1$, wurde $\Psi_j(f) = \delta_{j1}$, und entsprechend für $f \geq f_N$ $\Psi_j(f) = \delta_{jN}$ gesetzt. Wenn man mit diesen Ψ_j als Gewichtsfunktionen die Umverteilungsfunktion numerisch integriert, ergeben sich durchweg positive Matrixelemente

$$S_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{d\sigma}{df} (f \leftarrow f_i) \Psi_j(f). \quad (24)$$

Wie oben bereits erläutert, hat die hier verwendete Umverteilungsfunktion

$$\frac{d\sigma}{df} (f' \leftarrow f) := 4\pi\omega \frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} (\omega', 120^\circ \leftarrow \omega, 60^\circ) \quad (25)$$

zwar die wünschenswerte Eigenschaft, daß sie dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts genügt, aber leider liefert sie

nicht den richtigen Gesamt- Streuquerschnitt,

$$\sum_j \int_{-\infty}^{\infty} df' \frac{d\sigma_{ji}}{df}(f' \leftarrow f) \neq \sigma_i(f, 60^\circ) \tag{26}$$

wie er sich aus dem optischen Theorem ergibt (16). In dem Gleichungssystem (20) bewirkt jede Diskrepanz zwischen den Werten $\sum_j S_{ij}$ und $S_i = K_i - A_i$ eine scheinbare Absorption oder Emission von Photonen. Die Abweichungen sind jedoch nicht extrem, meist von der Größenordnung 10%, und nur in der Nähe der Zyklotronresonanz bis zu 30%. Aus diesem Grunde definieren wir den Streukoeffizienten einfach um,

$$S_i := \sum_{j=1}^N S_{ij} \quad , \tag{27}$$

und korrigieren entsprechend den Absorptionskoeffizienten,

$$A_i := \frac{S_i}{\sigma_i} \alpha_i \quad , \tag{28}$$

damit die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Wechselwirkung, $\varepsilon = \alpha/(\alpha + \sigma)$, unverändert bleibt. Für die Opazität und die "Diffusionskonstante" ergibt sich schließlich

$$K_i := A_i + S_i \quad , \quad D_i := \frac{1}{4 K_i} \quad . \tag{29}$$

Die Lösung des Systems von Diffusionsgleichungen vollzieht sich dann genau so wie im Abschnitt 5.3 beschrieben. Das Spektrum der entweichenden Strahlung gewinnt man durch Multiplikation der Thermalisierungswahrscheinlichkeit an der Oberfläche, $p(\nu, R)$, mit dem Wien-Spektrum, $I_\nu = 2 p(\nu, R) W_\nu$.

6.3. Ergebnisse

Wir betrachten ein homogenes Plasma mit vorgegebener Dichte ($\rho = 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$), Temperatur ($kT = 10 \text{ keV}$) und Magnetfeldstärke ($\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$). Abb. 21 zeigt die Opazitäten und Absorptionskoeffizienten eines solchen Plasmas für ordentliche und außerordentliche Photonen als Funktion der Energie. (Dies sind die modifizierten Koeffizienten K_i und A_i wie sie in den numerischen Rechnungen benutzt wurden.) Die folgenden

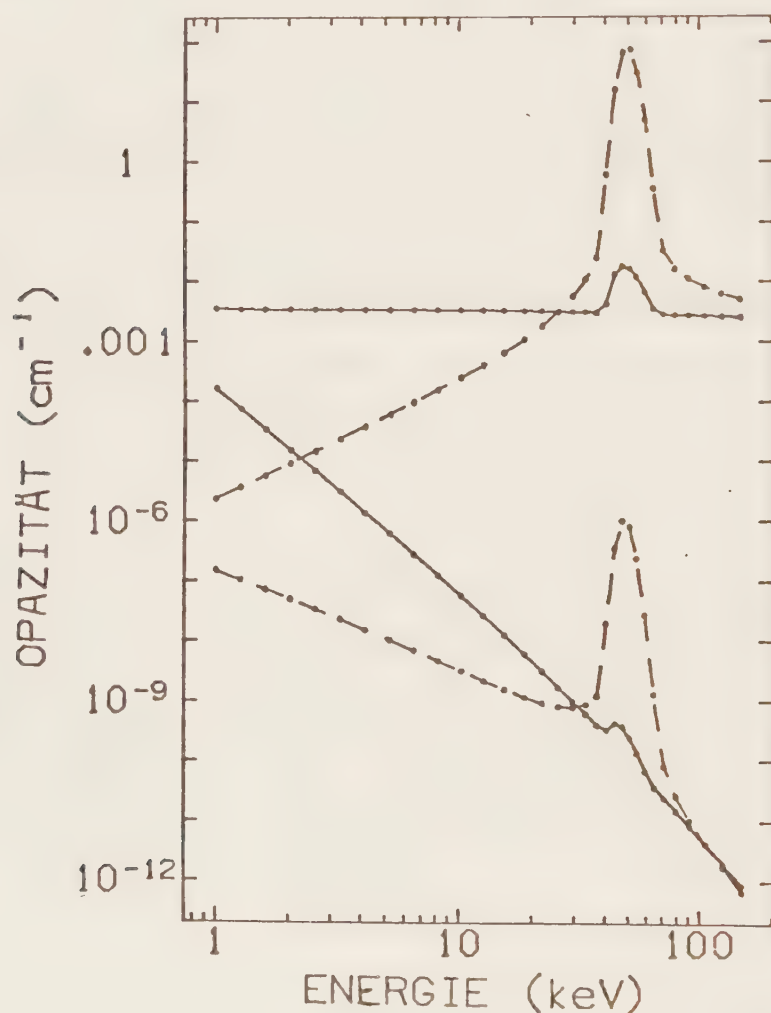


Abb. 21: Die Streu- und Absorptionskoeffizienten, die bei den numerischen Rechnungen zur Comptonisierung benutzt wurden. Obere Kurven: Streukoeffizienten, untere Kurven: Absorptionskoeffizienten. Durchgezogen: ordentliche Mode, gestrichelt: außerordentliche Mode. Plasma-Parameter: $\rho = 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$.

Zeichnungen 22 bis 24 zeigen die gewonnenen Spektren von Plasmaschichten verschiedener Dicke, $\tau_{Th}=0.1, 10$ und 1000 .

Wie zu erwarten, ist bei einer dünnen Schicht ($\tau_{Th}=0.1$) der Kontinuums- Fluß proportional zur frei-frei- Emissivität. Nur in der Nähe der Zyklotronfrequenz ist die Schicht - für außerordentliche Photonen - undurchsichtig. Wegen ihres großen Streuquerschnitts "stauen" sich die Zyklotron- Photonen im Innern der Schicht. Sie können erst entweichen, nachdem sie durch

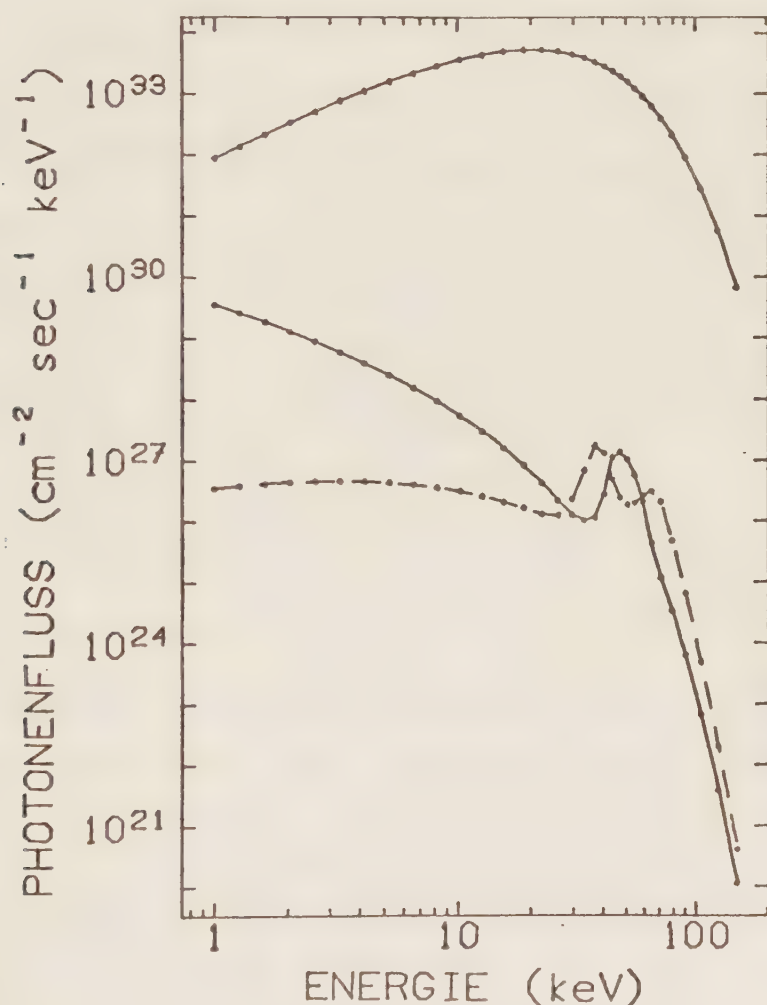


Abb. 22: Photonenfluß aus einer Schicht heißen, stark magnetisierten Plasmas (Parameter wie in Abb. 21). Die Schicht hat eine Dicke von 25 cm, entsprechend einer Thomson-Dicke $\tau_{Th}=0.1$. Die oberste Kurve stellt das Wien-Spektrum dar. Durchgezogen: ordentliche, gestrichelt: außerordentliche Photonen.

einige Compton- Stöße in die Flügel der Zyklotron- Linie gelangt sind. Im Gegensatz zu den Spektren, die wir im Kap. 4 unter der Annahme kohärenter Streuung berechnet haben, übersteigt die Intensität in den Linienflügeln die Intensität im Linienkern. Abb. 22 zeigt eine breite Emissionslinie von außerordentlichen Photonen mit einer Einsenkung in der Linienmitte ("Selbst-Umkehr"). Während man für die Thermalisierungswahrscheinlichkeit $p(\omega)$ ein symmetrisches Profil erhält, zeigt die Intensität eine deutliche Asymmetrie. Der niederenergetische Flügel ist wesentlich stärker als der hochenergetische wegen der Multiplikation mit dem Wien- Spektrum, das oberhalb von $3k_B T$ steil abfällt. Wasserman und Salpeter (1980) haben ein solches asymmetrisches, selbst-umgekehrtes Linienprofil vorhergesagt und die Asymmetrie mit dem Rückstoß der Elektronen (Compton- Effekt) begründet. Das ist eine andere Ausdrucksweise für denselben Sachverhalt: bei Energien weit oberhalb der thermischen Energie der Elektronen wird ein Photon meist Energie an das Elektron abgeben, wodurch es in den niederenergetischen Teil der Linie rutscht.

Wenn umgekehrt die Zyklotronfrequenz im ansteigenden Teil des Wien- Spektrums liegt, $\hbar\omega_c < 2k_B T$, ist der hochenergetische Teil der Linie stärker. Der Grund dafür ist das größere Phasenraumvolumen bei höheren Energien (Zustandsdichte $\propto \omega^2$). Obwohl diese Asymmetrie bei jeder Art von Absorptions- oder Emissionslinien vorhanden ist, spielt sie nur eine Rolle, wenn die relative Linienbreite, $\Delta\omega/\omega$, groß ist.

Für die "aufgestauten" außerordentlichen Photonen gibt es noch eine andere Möglichkeit zu entweichen: Streuung in die andere Polarisation. Ordentliche Photonen haben eine wesentlich

größere freie Weglänge (Fig. 21) und können die dünne Schicht ($\tau_{Th} \approx 0.1$) ungehindert verlassen. Der Wirkungsquerschnitt für Streuung von der außerordentlichen in die ordentliche Polarisationsmode ist zwar klein, doch können die ordentlichen Photonen aus größerer optischer Tiefe entweichen, wo die Dichte von außerordentlichen Photonen viel höher ist als am Rand. In dem in der Zeichnung 22 dargestellten Spektrum ist der Fluß von ordentlichen Photonen so stark, daß er die Einsenkung (Selbst-Umkehr) der Emissionslinie völlig auffüllt.

Mit zunehmender Dicke der Plasmaschicht wächst der Fluß im Kontinuum schneller als in der Linie. Bereits bei $\tau_{Th} \approx 10$ ist nur noch eine Absorptionslinie übrig (Abb. 23). Aufgrund ihrer größeren freien Weglänge entweichen in dem Bereich von 30 bis 80 keV fast nur ordentliche Photonen. Die Form der Absorptionslinie wird völlig durch die schwache Resonanz im Streuquerschnitt dieser Photonen bestimmt. Wenn, wie im Falle des kalten Plasmas, dieser Wirkungsquerschnitt frequenzunabhängig wäre, gäbe es im Spektrum der ordentlichen Photonen keine Linie. Nur wegen der breiten Absorptionslinie bei den außerordentlichen Photonen wäre dann im Gesamtspektrum eine schwache Einsenkung zu erkennen.

In Kap. 4 hatten wir gesehen, daß die Streuung von einer Polarisationsmode in die andere (verbunden mit einer Änderung der Wirkungsquerschnitte für das Photon) zu ganz anderen Spektren führt als jene Modelle, bei denen diese Streuprozesse nicht berücksichtigt werden. Ebenso erhalten wir jetzt, durch die Kopplung zwischen verschiedenen Frequenzen, ganz andere Spektren als in Kap. 4. Insbesondere ergeben sich keine so starken Emissionslinien. Die unter der Annahme kohärenter Streuung

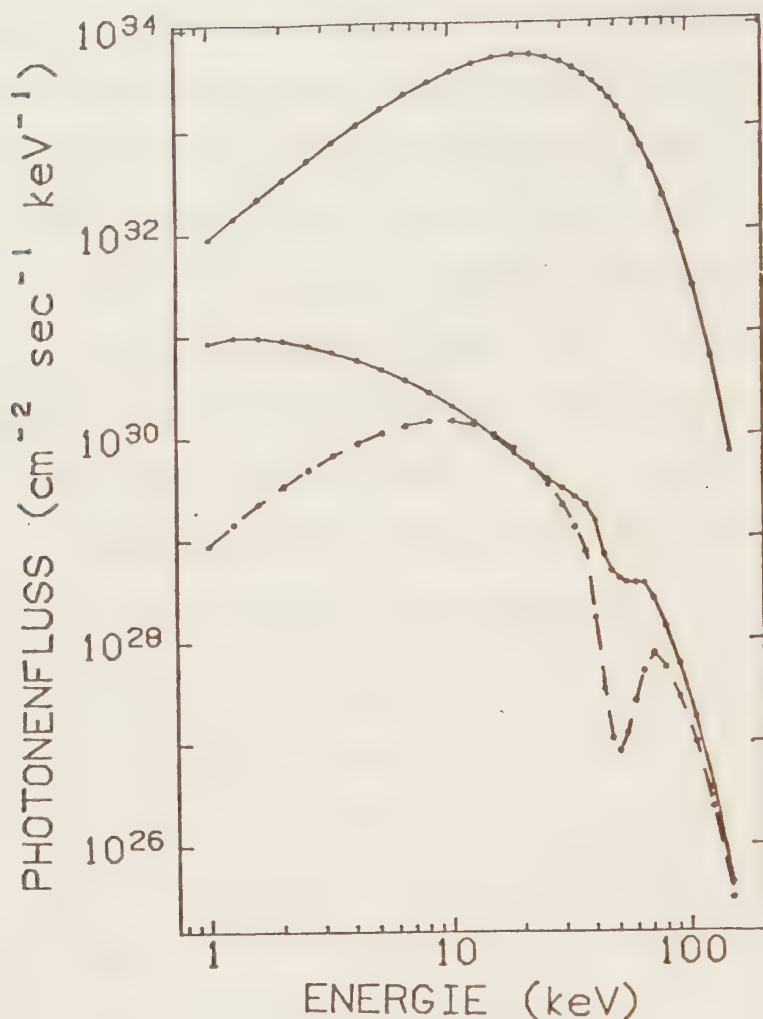


Abb. 23: Wie Abb. 22, für eine 2500 cm dicke Schicht ($\tau_{th} \approx 10$).

gefundene Emissionslinie entsprang einem Maximum im Spektrum der außerordentlichen Photonen in der Tiefe $\tau_{th} \sim 1$, aus der die ordentlichen Photonen entweichen können. Wie jetzt unsere genaueren Rechnungen zeigen, diffundieren die resonanten Photonen so schnell in die Linienflügel, daß dieses Maximum in der Tiefe $\tau_{th} \sim 1$ vollkommen ausgebügelt ist.

Zu den Absorptionslinien führt derselbe Mechanismus, der auch die bekannten Fraunhofer-Linien in den Spektren der meisten Sterne verursacht. Obwohl wir in unserem Modell keinen Temperaturgradienten haben, wie in den Sternatmosphären, haben wir

eine nach außen hin abnehmende Photonendichte. Bei der Zyklotronfrequenz "sehen" wir nur sehr oberflächennahe Schichten mit stark verringerten Photonendichten. Wieder zeigt sich, daß im optisch dicken Fall die Intensität mit der Eindringtiefe (oder Entweichtiefe) der Strahlung wächst, $I_\nu \propto W_\nu (\text{const} + \frac{1}{\kappa_\nu})$.

Was das Kontinuum betrifft, gibt es einige Ähnlichkeiten, aber auch wichtige Unterschiede zur Comptonisierung in heißen, nicht-magnetischen Plasmen (Felten und Rees 1972; Sunyaev und Titarchuk 1980). Im nicht-magnetischen Fall ist das Spektrum zusammengesetzt aus einem Potenzspektrum bei tiefen Frequenzen und einem "Buckel" bei hohen Frequenzen. Dieser Buckel ist ein verdünntes Wien-Spektrum, $\propto W_\nu$, wobei α meist eine sehr kleine Zahl ist - die Thermalisierungswahrscheinlichkeit. Man kann das auch so ausdrücken, daß oberhalb einer bestimmten Frequenz die Reflektivität, $1-\alpha$, einer Wolke heißen Plasmas unabhängig von der Frequenz des einfallenden Photons ist. Wenn die optische Dicke der Wolke erhöht wird, verschiebt sich die Schwelle zu niedrigeren Frequenzen. Der Wien-Buckel wird stärker, und das Potenzspektrum flacher.

Ähnlich verhalten sich in unseren Modellspektren (Zeichnungen 23 und 24) die ordentlichen Photonen, deren Streuquerschnitt nicht so stark vom Thomson-Querschnitt abweicht wie der der außerordentlichen Photonen. Natürlich ist der Wien-Buckel modifiziert durch die überlagerte breite Zyklotronlinie. Aber auch der niederfrequente Teil des Spektrums wird modifiziert: durch frei-frei-Absorption und durch Streuung von einer Polarisierung in die andere. Frei-frei-Absorption, ein Prozeß, der in den meisten Rechnungen zur nicht-magnetischen Comptonisierung ignoriert wird, beendet das "Leben" eines

niederenergetischen Photons bevor es durch Stöße mit schnellen Elektronen zu höheren Energien kommen kann. Die Streuung von der ordentlichen zur außerordentlichen Mode erhöht die freie Weglänge eines Photons drastisch, mit dem Ergebnis, daß das Photon entweicht, ohne den Elektronen weiter Energie zu entziehen.

Niederenergetische außerordentliche Photonen spielen nur eine untergeordnete Rolle in den Spektren der Abb. 22 und 23. Die beiden Plasmaschichten sind für diese Photonen durchsichtig,

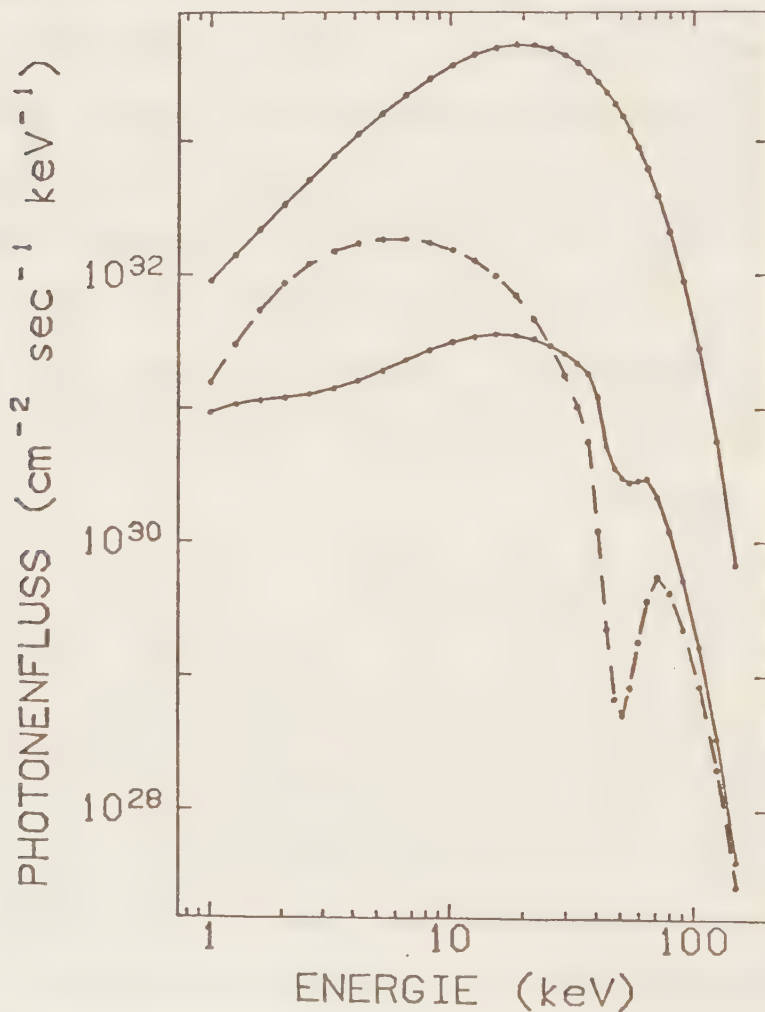


Abb. 24: Wie Abb. 22, für eine $2.5 \cdot 10^5$ cm dicke Schicht ($\tau_{Th} \approx 1000$).

d.h. die Wirkungsquerschnitte sind zu klein, als daß eine nennenswerte Zahl erzeugt würde. Demgegenüber ist die Schicht von Abb. 24 für diese Photonen undurchsichtig bis hinab zu einer Energie von etwa 2 keV. Wegen ihrer großen freien Weglänge liefern sie den Hauptbeitrag zum niederenergetischen Fluß. Man beachte, daß die Schicht von Abb. 24 so dick ist, daß fast jedes Photon, das in der Mitte der Schicht erzeugt wird, nach einer großen Zahl von Streuprozessen wieder absorbiert wird (ausgenommen lediglich außerordentliche Photonen unterhalb von 2 keV). Daher ist das Spektrum dieser Schicht fast dasselbe wie das einer halb- unendlichen Atmosphäre.

Die gesamte von der Schicht in Abb. 23 abgestrahlte Leistung ist $1.6 \cdot 10^{24} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$, die von Abb. 24 ist $10^{26} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$. Diese Werte liegen wesentlich über den Leuchtkräften, die man aus den in Kap. 4 unter der Annahme kohärenter Streuung berechneten Modellspektren ableitet. Es ist natürlich plausibel, daß die Comptonisierung wesentlich zur Kühlung des Plasmas beiträgt. Die vielen durch Bremsstrahlung erzeugten niederenergetischen Photonen werden mit höheren Energien versehen. Bei vollständiger Comptonisierung erreichen die Photonen eine mittlere Energie von $3k_B T$ (der Mittelwert für ein Wien-Spektrum). Andererseits ist die hohe Leuchtkraft natürlich ein Warnsignal, das darauf hindeutet, daß die Temperatur im Gegensatz zu unserer Annahme nicht überall gleich ist. Wenn die Compton-Kühlung dazu führt, daß die Temperatur zum Rand hin abnimmt, würde die Zyklotronlinie als Absorptionslinie noch stärker in Erscheinung treten.

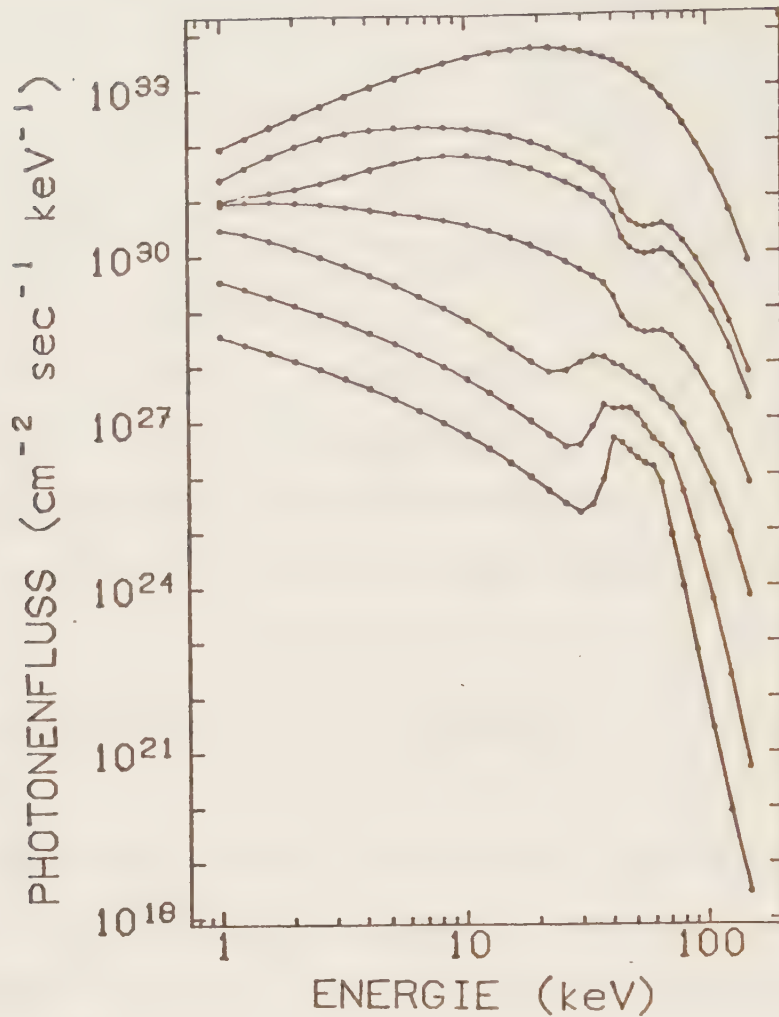


Abb. 25: Abhängigkeit der Gesamtspektren (Moden 1+2) von der optischen Dicke, $\tau_{th} = 10^{-2}, 10^{-1} \dots 10^3$. Plasma-Parameter: $\rho = 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$. Die abgestrahlte Leistung beträgt $8 \cdot 10^{20}, 6 \cdot 10^{21}, 6 \cdot 10^{22}, 2 \cdot 10^{24}, 4 \cdot 10^{25}$ bzw. $10^{26} \text{ erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}$.

Die Zeichnungen 25 und 26 fassen die Ergebnisse für homogene Plasmaschichten mit optischen Dicken von $\tau_{th} = 10^{-2}, 10^{-1}, \dots 10^3$ zusammen. In Fig. 25 wurde eine Dichte von $10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$ angenommen und eine Temperatur von 10 keV. Bei dieser Dichte übersteigt der Streu- den Absorptionskoeffizienten in dem ganzen hier betrachteten Energiebereich (1 ... 150 keV). Da der frei-frei- Absorptionskoeffizient proportional zum Quadrat der Dichte ist, wächst bei konstanter optischer Tiefe (für Thomson-Streuung) die Leuchtkraft mit zunehmender Dichte. Die

Energieverteilung der entweichenden Photonen hängt dagegen kaum von der Dichte ab, sondern vor allem von der Thomson- Dicke τ_{Th} . Nur bei sehr hohen Dichten und niedrigen Frequenzen, wenn Absorptionsprozesse über die Streuprozesse die Oberhand gewinnen, kann die Intensität wegen der Annäherung an die Schwarz- Körper- Grenze nicht weiter mit der Dichte zunehmen.

Eine Erhöhung der Temperatur hat einen viel stärkeren Einfluß auf das Spektrum (Abb. 26). Die Leuchtkraft steigt an, weil erstens mehr niederenergetische Photonen produziert werden,

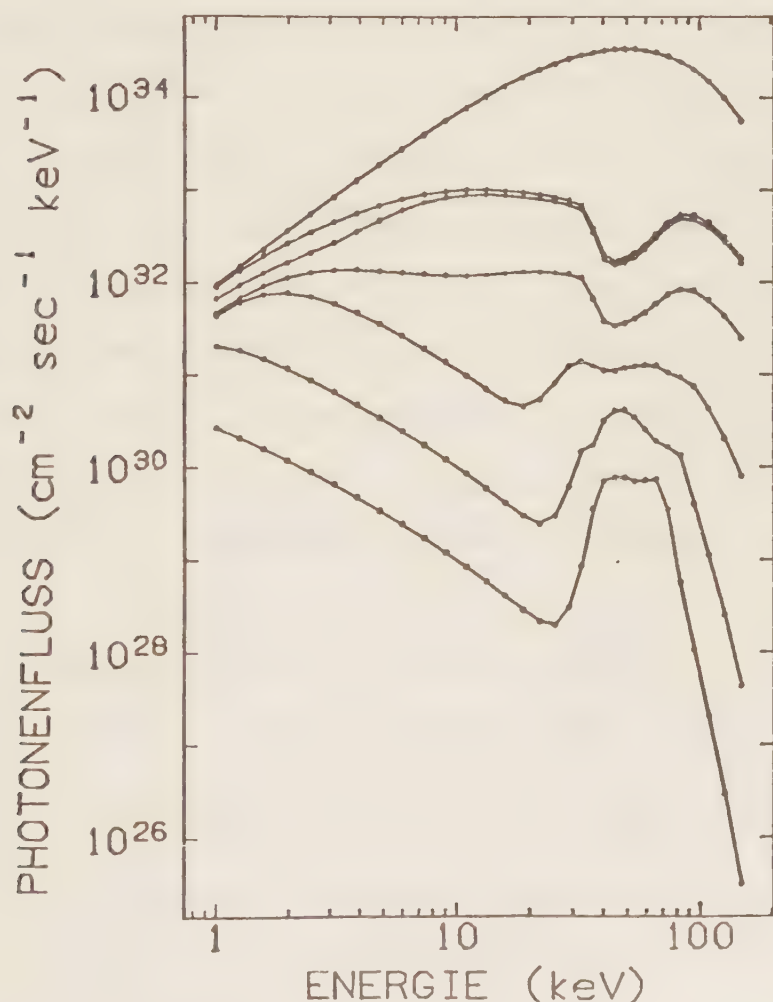


Abb. 26: Wie Abb. 25, aber für höhere Dichte (1 g cm^{-3}) und Temperatur (25 keV). Die abgestrahlte Leistung ist $3 \cdot 10^{24}$, $2 \cdot 10^{25}$, 10^{26} , 10^{27} , $6 \cdot 10^{27}$ bzw. $7 \cdot 10^{27}$ erg sec⁻¹cm⁻².

und zweitens das Wien- Spektrum zu höheren Frequenzen verschoben wird. Im Mittel haben dadurch die entweichenden Photonen höhere Energien, d.h. das Spektrum ist "härter". Außerdem erfährt die Zyklotronlinie natürlich eine erhebliche Doppler- Verbreiterung. Weil wir die Schuster- Schwarzschild- Näherung benutzen, ist die Linienbreite festgelegt auf $\Delta\omega/\omega = (2k_B T/mc^2)^{1/2} \cos(60^\circ)$. Eine genauere Rechnung würde zeigen, daß die Linienbreite von der Beobachtungsrichtung abhängt.

7. ASTROPHYSIKALISCHE SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die Strahlung von pulsierenden Röntgenquellen wie Her X-1 entsteht sicher nicht in homogenen Schichten oder Säulen, wie wir sie bei unseren Modellrechnungen zugrundegelegt haben. Trotzdem ist die Versuchung groß, die sich aus den Modellen ergebenden Spektren und Pulsformen mit den Beobachtungen zu vergleichen.

7.1. Das Beobachtungsmaterial

Hinweise auf die Existenz eines sehr starken Magnetfelds ($> 10^{12}$ G) gibt es nicht nur bei der schon in der Einleitung erwähnten Röntgenquelle Her X-1. Auch die Spektren von 4U 0115+63 (Wheaton et al. 1979; Rose et al. 1979) und 4U 1626-67 (Pravdo et al. 1979b) weisen Besonderheiten auf, die sich als breite Zyklotron-Resonanzstrukturen interpretieren lassen. Ein weiteres Indiz ist, daß die Stärke dieser Linien von der Pulsphase, d.h. von der Beobachtungsrichtung abhängt. Sogar bei den rätselhaften Ausbrüchen von Gammastrahlung hat man Zyklotronlinien gefunden (Mazets et al. 1981). Hier wollen wir uns jedoch auf das Objekt Her X-1 beschränken, da dieses bisher zweifellos am besten untersucht worden ist.

Zu den wichtigsten Merkmalen des Her X-1 Spektrums zählen:

- (1) Die Gesamtleuchtkraft bei einer angenommenen Entfernung von 6 kpc beträgt (im "On"-Zustand) etwa 10^{37} erg sec⁻¹ (Tucker und Blumenthal 1974).
- (2) Bei etwa 25 keV hat das Spektrum einen Knick: während unterhalb dieser Energie das Spektrum relativ flach ist, fällt es oberhalb steil ab (vgl. Zeichnung 2).

- (3) Der Photonenfluß erreicht ein Minimum bei etwa 40 keV, um danach wieder anzusteigen und bei 58 keV erneut einen Maximalwert anzunehmen. Dies läßt sich entweder als Absorptionslinie um ~ 40 keV, oder als Emissionslinie bei 58 keV deuten (Trümper 1978b). Die Breite der Linie (FWHM) beträgt etwa 21 keV (bei Interpretation als Emissionslinie) oder etwa 11 keV (bei Interpretation als Absorptionslinie) (Trümper 1981).
- (4) In Beobachtungsdaten vom 3. Mai 1976 (Trümper et al. 1978) gibt es Anzeichen für eine zweite Harmonische der Zyklotronlinie: entweder eine zweite Emissionslinie bei ~ 110 keV, oder eine zweite Absorptionslinie bei ~ 80 keV. Weil das Spektrum zu hohen Energien hin sehr schnell abfällt, sind diese Aussagen mit einem hohen statistischen Fehler behaftet. In den Daten vom 3. Sep. 1977 (Voges et al. 1979) gibt es keine signifikante Erhöhung (bzw. Erniedrigung) des Photonenflusses bei der Frequenz, wo man die zweite Harmonische der Zyklotronlinie erwarten würde.

Was die Form der Röntgenpulse von Her X-1 betrifft, so ist festzustellen:

- (5) Bei hohen Photonenenergien (>25 keV) hat die Lichtkurve eine einfache Puls- Zwischenpuls- Struktur. Der Hauptpuls füllt etwa 30% der Pulsperiode aus. Der Zwischenpuls, um 180° phasenverschoben gegen den Hauptpuls, ist wesentlich schwächer als der Hauptpuls (Zeichnung 1).
- (6) Unterhalb von 25 keV zerfällt der Hauptpuls in einen Doppelpuls, wobei der zweite Puls deutlich kleiner ist als der erste (vgl. Zeichnung 1). Die gesamte Breite des Hauptpulses ist größer als bei hohen Frequenzen - etwa 40% der Pulsperiode. Bemerkenswert sind auch die steilen Flanken

des Hauptpulses, mit Anstiegszeiten von 30...50 msec (Pravdo et al. 1977).

(7) Obwohl die Pulsform von Puls zu Puls variieren kann (Friedman 1979), scheint sich die über viele Perioden gemittelte Lichtkurve seit der Entdeckung der Quelle nicht wesentlich verändert zu haben (Pravdo et al. 1979a). Dies gilt zumindest für den "On"-Zustand von Her X-1. Es gibt aber Hinweise darauf, daß das Puls / Zwischenpuls- Verhältnis im "Short On"- Zustand kleiner ist als im "On"-Zustand (Trümper 1978a).

Diese 7 Punkte fassen natürlich bei weitem nicht alle Beobachtungen von Her X-1 zusammen. Es wäre aber schön, wenn eines unserer Modelle - eine homogene Schicht oder Säule - wenigstens diese Kennzeichen der Röntgenquelle Her X-1 qualitativ widerspiegeln könnte.

7.2. Modelle

Während man die in den Kapiteln 4 und 6 erhaltenen Spektren der Abb. 2 direkt gegenüberstellen kann, ist der Schluß von den in Kap. 5 berechneten Winkelverteilungen auf die Pulsformen (Abb. 1) etwas schwieriger. Man muß dazu zwei Winkel kennen: den Winkel i_1 zwischen der Rotationsachse des Neutronensterns und der Richtung zur Erde, sowie den Winkel i_2 zwischen der Rotations- und der Dipolachse (vgl. Abb. 27). Der Winkel ϑ , unter dem wir die strahlende Schicht oder Säule am magnetischen Pol des Neutronensterns sehen, variiert dann mit der Phase Φ nach der Formel

$$\cos \vartheta = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos 2\pi \Phi . \quad (1)$$

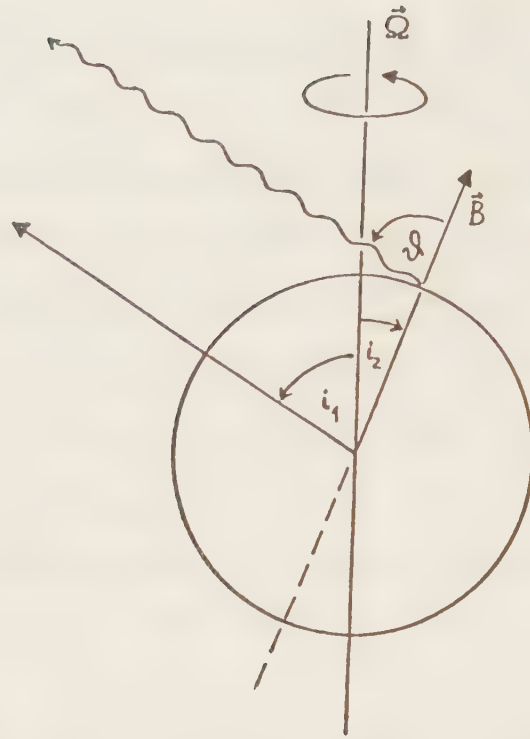


Abb. 27: Bei der Rotation des Neutronensterns ändert sich der Winkel, unter dem wir den heißen Fleck, bzw. die Akkretionssäule sehen. In der gezeichneten Stellung ist $\vartheta = i_1 + i_2$ ($\Phi = 0.5$); nach einer halben Umdrehung wäre $\vartheta = i_1 - i_2$ ($\Phi = 0$).

Die Extremwerte von ϑ sind $|i_1 - i_2|$ (für $\Phi = 0$) und $i_1 + i_2$ (für $\Phi = 0.5$). Indem wir diese Formel benutzen, lassen wir die Lichtablenkung im starken Gravitationsfeld des Neutronensterns außer acht. Da wir sowieso nur eine qualitative Übereinstimmung der theoretischen Pulsformen mit den beobachteten erwarten können, erscheint diese Vereinfachung gerechtfertigt.

Mit der in Kap. 5 geschilderten Methode wurde die Anisotropie der entweichenden Strahlung bei verschiedenen Frequenzen, jeweils für eine Schicht oder Säule bestimmter Dicke, berechnet. Die gefundenen Winkelverteilungen wurden dann mit Hilfe der Gleichung (1) für verschiedene Winkel-Paare (i_1, i_2) in Pulsformen übersetzt. Wenn $i_1 + i_2$ größer ist als 90° , sieht man bei bestimmten Pulsphasen den anderen magnetischen Pol ($\vartheta > 90^\circ$). In diesem Fall wurde der für $180^\circ - \vartheta$ berechnete Fluß benutzt,

d.h. der zweite Pol wurde als genaues Spiegelbild des ersten angenommen.

Als Beispiel zeigt Abb. 28a die Winkelverteilung der aus einer 200 cm dicken Plasmaschicht (mit einer Temperatur von 10 keV, einer Dichte von 0.1 g cm^{-3} und einem Magnetfeld von $\sim 5 \cdot 10^{12} \text{ G}$) entweichenden Photonen bei Energien von 1, 2.5, 5, 10, 25 und 75 keV. Das Gleiche zeigt Abb. 28b für eine Säule mit einem Radius von 1000 cm. Die sich daraus ergebenden Pulsformen zeigt Abb. 29 (für 5 verschiedene Winkel-Paare i_1, i_2).

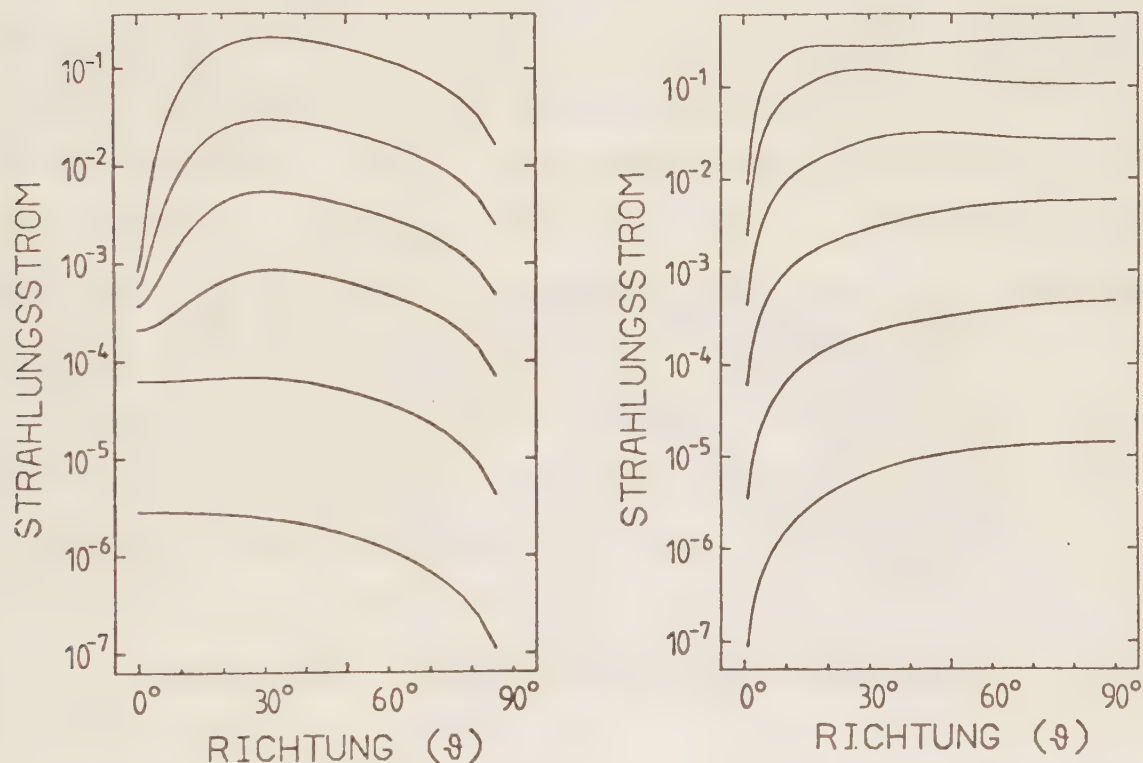


Abb. 28: Richtungsverteilung der Strahlung einer Schicht und einer Säule bei Photonen-Energien von 1, 2.5, 5, 10, 25 und 75 keV (von oben nach unten). Die Zyklotron-Frequenz liegt bei 50 keV.

(a) Strahlungsstrom von einer Schicht der Dichte 0.1 g cm^{-3} , Temperatur 10 keV und mit einer Dicke von 200 cm.

(b) Strahlungsstrom von einer Säule der Dichte 0.1 g cm^{-3} , Temperatur 10 keV und mit einem Radius von 1000 cm.

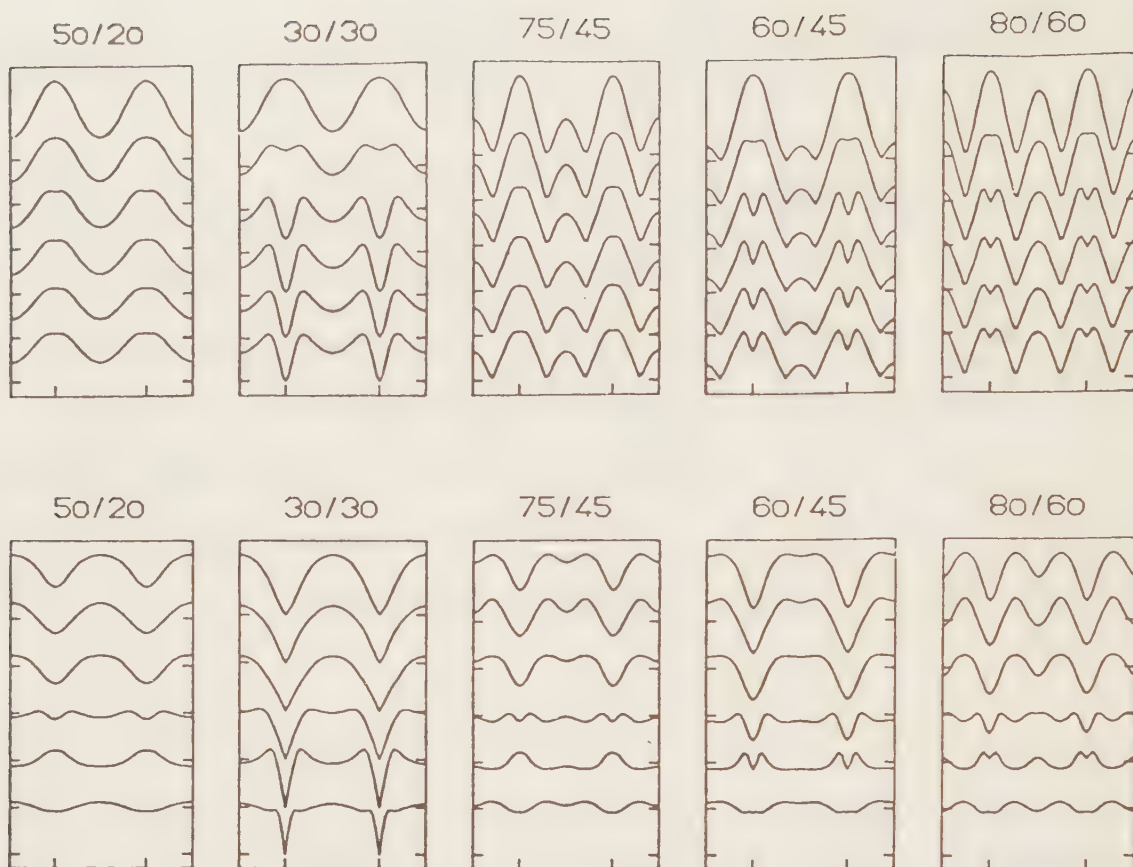


Abb. 29: Die aus den Richtungsverteilungen von Abb. 28 abgeleiteten Pulsprofile, gezeichnet für jeweils zwei Perioden. Die obersten Kurven zeigen die Pulsformen bei 75 keV, die untersten bei 1 keV. Die Zahlen oberhalb der Kästchen geben die beiden Winkel i_1 und i_2 an. Alle Kurven sind durch Division durch den Gesamtstrahlungsfluß bei der entsprechenden Energie normiert; die kurzen waagerechten Striche markieren das jeweilige Nullniveau.

(a) Pulse des Schicht-Modells.

(b) Pulse des Säulen-Modells.

Aus den Zeichnungen ist die allgemeine Tendenz erkennbar, daß die Pulsprofile bei tieferen Frequenzen komplizierter sind als bei hohen. Der Grund dafür ist die ausgeprägte Anisotropie der Wirkungsquerschnitte bei Frequenzen weit unterhalb der Zyklotronfrequenz. Bei niedrigen Frequenzen können die Schichten oder Säulen unter der Blickrichtung $\vartheta \approx 0^\circ$ durchsichtig sein, aber undurchsichtig bei großen Winkeln. Die Struktur der Pulse hängt

stark von $|i_1 - i_2|$ ab. Am kompliziertesten ist sie, wenn $i_1 \approx i_2$, d.h. wenn man bei der Phase $\Phi = 0$ fast genau auf einen der magnetischen Pole schaut. Wie zu erwarten, liefert ferner die Schichtgeometrie ("Scheinwerfer"- Richtcharakteristik) engere Pulse als die Zylindergeometrie ("Laternen"- Richtcharakteristik).

Eine gewisse Ähnlichkeit mit den Pulsen von Her X-1 haben die Pulse der Schicht (Abb. 29a) für die Winkel $(i_1, i_2) = (45^\circ, 60^\circ)$. Der einfache Hauptpuls bei hohen Energien (25, 75 keV) spaltet sich auf in einen Doppelpuls bei niederen Energien (1, 2.5, 5, 10 keV). Diese "Aufspaltung" ist eine einfache Folge des auf S. 85 beschriebenen Übergangs der Richtcharakteristik von einem Voll- zum Hohlkegel. Der Zwischenpuls zur Phase $\Phi = 0.5$ wird durch den anderen Pol verursacht. Die Puls- Zwischenpuls- Struktur bei hohen Frequenzen steht in relativ guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Auch die zeitliche Variation des Puls / Zwischenpuls- Verhältnisses ließe sich erklären: entweder durch Variation der Akkretionsrate an einem oder beiden Polen, oder durch Präzession des Neutronensterns, wobei sich einer der Winkel (i_1) etwa zwischen 45° und 80° verändern könnte (vgl. die letzten beiden Zeichnungen in Fig. 29a).

Was unser Modell nicht erklären kann, ist die Asymmetrie des Hauptpulses bei niedrigen Energien. Da zwischen den Werten $|i_1 - i_2|$ und $i_1 + i_2$ jeder Beobachtungswinkel ϑ genau zweimal pro Umdrehung erreicht wird, führen unsere rotationssymmetrischen Schichten oder Säulen unweigerlich zu symmetrischen Pulsprofilen, $F(\Phi) = F(1 - \Phi)$. Wie schon Pravdo (1976) bemerkte, erfordert die Asymmetrie der Pulse daher ein nicht- rotationssymmetrisches

Modell. Abweichungen von der Rotationssymmetrie ergeben sich fast zwangsläufig dadurch, daß Rotations- und Dipolachse des Neutronensterns nicht zusammenfallen. Nach den Vorstellungen von Basko und Sunyaev (1976a) z.B. fällt wegen der Wechselwirkung der Magnetosphäre mit der Akkretionsscheibe das Plasma entlang zweier offener, den magnetischen Pol umgebenden Bögen auf den Neutronenstern. Es ist nicht genau bekannt, wie das Plasma vom inneren Rand der Akkretionsscheibe auf die zu den Polen führenden Feldlinien gelangt (siehe hierzu z.B. Anzer und Börner 1980; Arons und Lea 1980). Möglicherweise führt die komplizierte Wechselwirkung von Akkretionsscheibe und Magnetosphäre zu einer sehr bizarren Form der "heißen Flecken" an den magnetischen Polen. Wichtig sind hierbei natürlich auch Abweichungen des Magnetfelds vom reinen Dipolfeld.

Mit unserem Modell ist es auch schwierig, die steilen Flanken der beobachteten Niederenergie-Pulse nachzuahmen. Nach McCray und Lamb (1976) könnten sie dadurch zustandekommen, daß eine in der Magnetosphäre mitrotierende "Schale" den Neutronenstern periodisch verdeckt. Eine andere Möglichkeit ist, daß die Strahlung überwiegend von einer (relativ kurzen) Akkretionssäule kommt, die bei jeder Umdrehung hinter dem Neutronenstern verschwindet und wieder auftaucht (Wang und Welter 1981).

Natürlich sollte ein Modell der Röntgenquelle Her X-1 nicht nur die beobachteten Pulsformen, sondern auch das Spektrum reproduzieren. Vor allem sollte die abgestrahlte Leistung in derselben Größenordnung liegen wie die beobachtete Leuchtkraft. Die Schicht von Abb. 28a mit den Parametern $\rho = 0.1 \text{ g cm}^{-3}$, $k_B T = 10 \text{ keV}$, $2R = 200 \text{ cm}$ kann diese Forderung nicht erfüllen - der

Energiefluß liegt nur bei $\sim 10^{25} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$. Um $10^{37} \text{ erg sec}^{-1}$ abzustrahlen, bräuchte man eine Fläche von 10^{12} cm^2 , d.h. die Schicht müßte ein Viertel der Neutronensternoberfläche bedecken. Wenn man eine realistischere Größe des heißen Flecks von 10^{10} cm^2 annimmt, sollte die Schicht etwa $10^{27} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ abstrahlen. Dazu kann man entweder die Temperatur oder die Dichte erhöhen. Wir hatten gesehen, daß man bei einer höheren Temperatur (25 keV) ein sehr hartes Spektrum und eine sehr breite Zyklotronlinie erhält. Um das Modell der Wirklichkeit näherzubringen, kann man daher nur die Dichte erhöhen. Bei einer Dichte von 10 g cm^{-3} und einer verringerten Schichtdicke von 2 cm (um die Thomson- Dicke $\tau_{\text{Th}} \sim 8$, d.h. die Struktur der Pulse nicht zu verändern), erreicht man in etwa den benötigten Energiefluß. Das Spektrum einer solchen Schicht zeigt Abb. 30. Wie man sieht, entspricht das steile Abfallen des Spektrums bei hohen Energien und die überlagerte Zyklotronlinie qualitativ den Beobachtungen. Jedoch verläuft der niederenergetische Teil des Spektrums ganz anders. Bei tieferen Frequenzen ($\hbar\omega < k_B T$) ist aus verschiedenen Gründen eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen auch nicht zu erwarten. Zum einen haben wir die stimulierte Emission vernachlässigt, weshalb die Intensität mit ω^3 (Wien- Spektrum) wächst, statt mit ω^2 (Planck- Spektrum). Noch bedenklicher ist unsere Annahme, daß die Temperatur in der Schicht überall gleich ist. Bei niedrigen Energien können außerordentliche Photonen aus sehr tiefen und möglicherweise viel heißeren Schichten entweichen. Dieser Teil des Spektrums wird daher empfindlich davon abhängen, wo und wie die Energie der einfallenden Ionen thermalisiert wird. Wegen der großen freien Weglänge der außerordentlichen Photonen können hier auch die Eigenschaften der Neutronensternoberfläche unterhalb der heißen

7.

Schicht eine Rolle spielen.

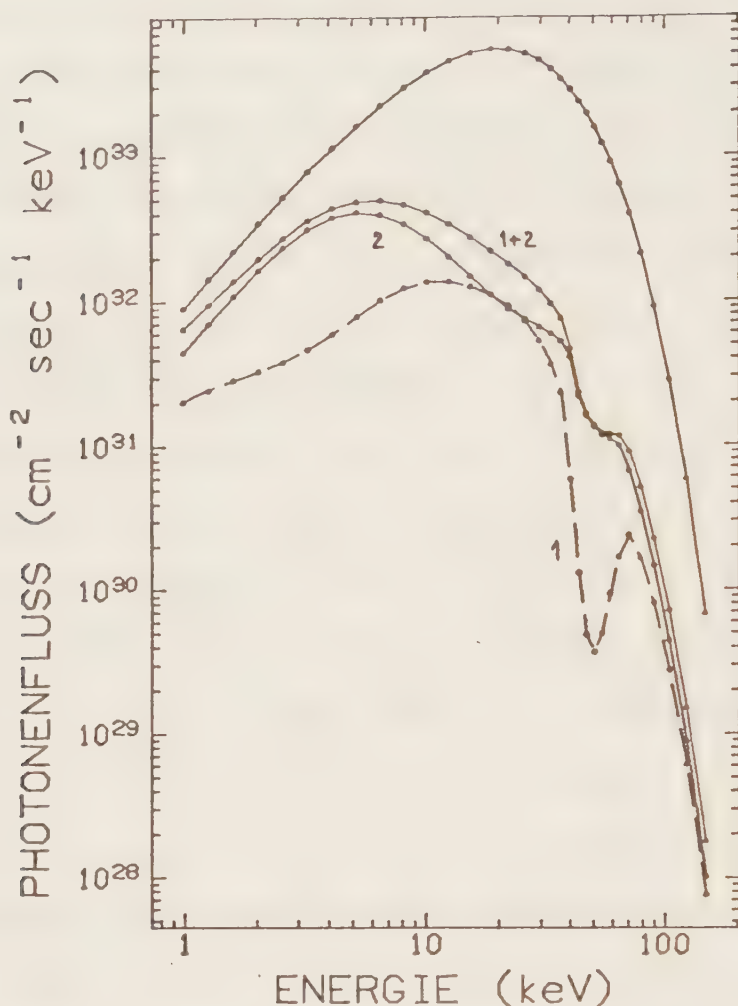


Abb. 30: Spektrum einer 2 cm dicken heißen Plasmaschicht ($\rho = 10 \text{ g cm}^{-3}$, $kT = 10 \text{ keV}$, $\hbar\omega_c = 50 \text{ keV}$, $\tau_{Th} \approx 8$, $L_X \approx 2.7 \cdot 10^{26} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$).

Das Hauptergebnis dieser Arbeit bleibt von solchen Einzelheiten unberührt: die Linie im Spektrum von Her X-1 ist wahrscheinlich eine Absorptions- und keine Emissionslinie. Genauere Modellrechnungen werden andere, von der Pulsphase abhängige Linienbreiten liefern, und sicherlich andere Linienintensitäten. Aber in den allermeisten Modellen, die eine strahlende Fläche von $\sim 10^{10} \text{ cm}^2$ und eine Leuchtkraft von $\sim 10^{37} \text{ erg sec}^{-1}$ miteinander verbinden, ist eine Zyklotron-Absorptionslinie zu erwarten. Emissionslinien erhält man nur aus

optisch dünnen Gebieten, deren Leuchtkraft bei Dichten von $10^{-3} \dots 10^{-1} \text{ g cm}^{-3}$ gering ist. Das Hauptproblem ist, daß bei solchen Dichten kein LTE vorliegen kann, und Zyklotronemission daher kein so effizienter Kühlungsmechanismus ist, wie z.B. von Gnedin und Sunyaev (1973) angenommen wurde. Um einer optisch dünnen Schicht ($\tau_n \lesssim 10^{-1}$) eine Leuchtkraft vergleichbar der von Her X-1 zu geben, muß die Dichte sehr hoch sein ($\rho \gtrsim 100 \text{ g cm}^{-3}$). In unserem Modell könnte eine solche Schicht eine Emissionslinie liefern und gleichzeitig eine Leistung von $\sim 10^{27} \text{ erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ abstrahlen.

Eine Reihe von hier außer acht gelassenen Effekten begünstigt die Entstehung von Absorptionslinien. Ein nach innen gerichteter Temperaturgradient würde zu einer Art von Fraunhofer-Linie führen. Auch die Dichte wird nicht überall konstant sein. Schichten sehr dünnen Plasmas, die über dem strahlenden dichteren Plasma liegen, können die Zyklotron-Photonen in die Linienflügel streuen (wegen des größeren Verhältnisses von Streu- zu Absorptionsquerschnitt im dünneren Plasma). Schließlich werden Einflüsse der Vakuum-Polarisation auf die Polarisationsmoden (Mészáros und Ventura 1979), sowie die Spin-Umklapp-Streuung (Bonazzola et al. 1979) den Streuquerschnitt für ordentliche Photonen bei der Zyklotronfrequenz wesentlich erhöhen. Dadurch wird die Selbst-Umkehr der Linie schon bei kleineren optischen Dicken ($\tau_n \sim 10^{-2} \dots 10^{-3}$) einsetzen.

Mit Vakuum-Polarisation bezeichnet man die doppelbrechende Wirkung eines starken Magnetfeldes, die von virtuellen Elektron-Positron-Paaren hervorgerufen wird und daher von der Anwesenheit eines Plasmas ganz unabhängig ist (Erber 1961). Auf den Einfluß dieses Effekts auf die Strahlung von Röntgenpulsaren haben Novick

et al. (1977) hingewiesen. Die Brechungsindizes (im Vakuum) für senkrecht zum Magnetfeld bzw. in der $(\vec{B}, \vec{k})$ -Ebene polarisierte Wellen unterscheiden sich in niedrigster Ordnung von $\hbar\omega_c/mc^2$ um

$$\frac{\alpha}{30\pi} \left(\frac{\hbar\omega_c}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \sim 2 \cdot 10^{-7} \quad (2)$$

(für ein Magnetfeld von $5 \cdot 10^{12}$ G, $\vartheta = 60^\circ$). Bei vorgegebener Dichte, z.B. $10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$, ist dies in bestimmten Frequenzbereichen ($\hbar\omega \gtrsim 10 \text{ keV}$) größer als der Beitrag des Plasmas zum Brechungsindex, $\omega_p^2/\omega^2 \lesssim 10^{-7}$. Die Polarisationsmoden werden also bei den uns interessierenden Frequenzen stärker von der Vakuum-Polarisation als vom Plasma bestimmt (Mészáros und Ventura 1978, Gnedin et al. 1978b).

Weit unterhalb der Zyklotronfrequenz sind die Moden eines Plasmas linear polarisiert - wie die des Vakuums. Während jedoch die senkrecht zum Magnetfeld polarisierte Welle im Plasma einen größeren Brechungsindex hat als die parallel polarisierte, ist das im Vakuum genau umgekehrt. Die Einflüsse von Plasma und Vakuum heben sich bei zwei bestimmten Frequenzen gegenseitig auf:

$$\left. \begin{matrix} \omega_o^2 \\ \omega_i^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \omega_c^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} \omega_c^2 - \frac{15\pi}{\alpha} \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \omega_p^2} \quad (3)$$

(Dies gilt bei Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld, $\vartheta = 90^\circ$.) In dem dazwischen liegenden Bereich vertauschen ordentliche und außerordentliche Wellen ihre Identität (Ventura et al. 1979). Durch den sprunghaften Übergang von der senkrechten zur parallelen Polarisation ändern sich die Wirkungsquerschnitte bei der Frequenz ω_o drastisch, was sich als scharfe Struktur im Spektrum niederschlagen kann (Ventura et al. 1979). Weil ω_o stark von der Dichte (ω_p) abhängt, ist es jedoch wahrscheinlich, daß diese "Struktur" durch die sicherlich vorhandenen Dichteunterschiede ausgewaschen wird.

Während bei tiefen Frequenzen ($\omega \ll \omega_c$) die Moden überwiegend linear polarisiert sind und die Vakuum-Polarisation im wesentlichen nur einen Rollentausch der ordentlichen und außerordentlichen Wellen bewirkt, ist der Einfluß der Vakuum-Polarisation in der Nähe der Zyklotronresonanz komplizierter. Bei der Zyklotronfrequenz erhöht sich der Plasma-Beitrag zur Polarisierbarkeit des Mediums. Insbesondere bei kleinen Winkeln θ kann wieder ein Übergang von Vakuum- zu Plasma-dominierten Moden stattfinden. In jüngster Zeit haben Herold, Ruder und Wunner (1981) die Zyklotronresonanz sehr eingehend untersucht, wobei sie die Polarisationsmoden für ein heißes Plasma zugrunde legten, und relativistische Korrekturen an der Doppler-Verbreiterung berücksichtigten. Ihre Rechnungen haben eine sehr komplizierte Temperatur-, Dichte- und Richtungsabhängigkeit des Linienprofils enthüllt. Aussagen über die bei Her X-1 zu erwartende Linienform sind schwierig, weil über die Dichte-, Temperatur-, Geschwindigkeits- und Magnetfeld-Variation in dem strahlenden Gebiet wenig bekannt ist.

Zusammenfassend können wir folgendes feststellen:

- Das strahlende Gebiet sollte eine relativ hohe Dichte haben ($\gtrsim 1 \text{ g cm}^{-3}$) um - in unserem Modell - die benötigte Leuchtkraft ($\sim 10^{37} \text{ erg sec}^{-1}$) abstrahlen zu können. Bei niedrigen Dichten ist Bremsstrahlung kein effizienter Kühlungsmechanismus.
- Zyklotronlinien treten wahrscheinlicher in Absorption als in Emission auf. Nur bei extrem kleinen optischen Dicken sind Emissionslinien zu erwarten.
- Die Form der Absorptionslinie richtet sich nach dem Frequenzverlauf des Streuquerschnitts der Wellen mit der größeren freien Weglänge. Obwohl die Vakuum-Polarisation die

Wirkungsquerschnitte für ordentliche und außerordentliche Wellen einander angleicht (Mészáros und Ventura 1979; Herold et al. 1981), liegt der Wirkungsquerschnitt für die ordentlichen Wellen i.a. doch deutlich unter dem der außerordentlichen Photonen. Wenn wir für diesen Wirkungsquerschnitt die einfache Frequenzabhängigkeit $\sigma(\omega) \approx \sigma_{Th} + \sigma_c e^{-\left(\frac{\omega - \omega_r}{\Delta\omega}\right)^2}$ ansetzen, können wir für das sich aus unserem Modell ergebende Linienprofil eine analytische Formel gewinnen:

$$A \omega^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \left/ \left[1 + B e^{-\left(\frac{\omega - \omega_r}{\Delta\omega}\right)^2} \right] \right. , \quad (4)$$

mit den fünf Parametern A, B, T, ω_r und $\Delta\omega$. Eine solche Funktion sollte man an die Beobachtungsdaten für das harte Röntgenspektrum von Her X-1 anpassen.

7.3. Ausblick

In den Kapiteln 4, 5 und 6 haben wir uns durch Berücksichtigung der Polarisations-, Winkel- und Frequenzabhängigkeit schrittweise von einigen der Übervereinfachungen der in Kapitel 3 diskutierten Transportgleichung befreit. Wegen der ad-hoc-Annahmen, insbesondere über die Geometrie des strahlenden Gebiets, sind wir jedoch von einem selbstkonsistenten Modell noch weit entfernt. Einige dieser vereinfachenden Annahmen kann man fallenlassen, ohne daß das Problem gleich unlösbar wird.

Am leichtesten zu "reparieren" wäre die Annahme, daß die Besetzung der höheren Landau-Niveaus vernachlässigbar ist. Die Besetzungszahlen im Einklang mit der lokalen Photonendichte zu berechnen, erfordert eine iterative Lösung der

Strahlungstransportgleichung, für die es erprobte Verfahren gibt (Mihalas 1978, S.396ff.). Eine solche "non-LTE"- Rechnung würde dann sinnvolle Aussagen über mögliche zweite und dritte Harmonische der Zyklotronlinie erlauben.

Natürlich steckt die Annahme thermodynamischen Gleichgewichts auch in der zugrundegelegten Maxwell- Verteilung. Es ist denkbar, daß der hochenergetische Teil der Geschwindigkeitsverteilung unterbesetzt ist, weil schnelle Elektronen ($mv^2/2 > \hbar\omega_c$) bei Stößen in höhere Landau- Niveaus gelangen und ihre Energie abstrahlen können. Langer, McCray und Baan (1980) haben dieses Problem untersucht, dabei jedoch den Einfluß der Compton- Streuprozesse auf die Verteilungsfunktion ignoriert. Für ein in dieser Hinsicht selbstkonsistentes Modell müßte man zwei Transportgleichungen für Photonen und Elektronen gleichzeitig lösen.

Erfolgversprechender wäre es, lediglich unsere Annahme globalen thermodynamischen Gleichgewichts ($dT/dr=0$) zu lockern. Man könnte, wiederum iterativ, die Temperaturverteilung so bestimmen, daß die Kühlung durch Strahlung überall die Energiezufuhr durch die Abbremsung der schnellen Ionen kompensiert. Das Problem wäre dem Transportproblem in den Sternatmosphären analog, nur daß die Heizung nicht von unten, sondern von oben erfolgt.

Wesentlich schwieriger ist es, für eine ausgeglichene Impulsbilanz zu sorgen. Bei einer Leuchtkraft nahe der Eddington- Grenze, $L \sim 10^{38}$ erg sec⁻¹, spielt der Strahlungsdruck eine wesentliche Rolle bei der Abbremsung des herabfallenden Plasmas. Die Strahlung des heißen Flecks, mit ihrer "Hohlkegel"- Richtcharakteristik, könnte womöglich das herabströmende Plasma

gar nicht durchdringen. Es wäre für die Photonen einfacher, seitlich aus einer Akkretionssäule zu entweichen, als gegen das strömende Plasma zu diffundieren. Die wirkliche Geometrie der Akkretionssäule ist sicher viel komplizierter als unsere eindimensionalen Modelle und wird die Pulsformen und Spektren entscheidend mitbestimmen. Es besteht aber die Hoffnung, daß für hydrodynamische Rechnungen eine Diffusionsnäherung (Mittelung über die Winkel) und die Annahme einer "grauen Atmosphäre" (Mittelung der Wirkungsquerschnitte über alle Frequenzen) akzeptable Näherungen darstellen. Auf der Basis genauerer hydrodynamischer Modelle könnte man nachträglich, ähnlich wie in Abschnitt 5.1, Pulsformen und Spektren ableiten, um so dem ständig wachsenden Beobachtungsmaterial bessere Modelle gegenüberstellen zu können.

Danksagung

Diese Arbeit hätte nicht entstehen können ohne die zahlreichen Anregungen und klärenden Diskussionsbeiträge von Kollegen. Herrn Brinkmann verdanke ich die Anregung, mich mit der frei-frei-Emission in einem stark magnetisierten Plasma zu beschäftigen, womit meine wissenschaftliche Arbeit begann. Die Betrachtung zweier gekoppelter Diffusionsgleichungen entsprang mehreren Diskussionen mit Herrn Aschenbach. Herr Mészáros gab den Anstoß zur Betrachtung eindimensionaler Medien, was die benutzten Gleichungen besser verstehen half und mich schließlich zur Verallgemeinerung auf winkel- und frequenzabhängige Gleichungen führte. Bei der Interpretation der anfänglich verwirrenden Modellspektren war mir Herr Ventura eine große Hilfe. Für zahlreiche Fragen, die manches als nur scheinbar verstanden aufzeigten, und seine ständige Bereitschaft zur Diskussion bin ich ihm zu besonderem Dank verpflichtet. Für mehrere Diskussionen danke ich auch Herrn Yahel, und den Herren Pietsch, Proctor und Voges für Aufklärung über die Beobachtungsdaten. Eine solche Gruppe zusammengeführt zu haben, ist das Verdienst von Professor Trümper, der auch den allerersten Anstoß zu dieser Arbeit gegeben hat. Für viele sowohl anregende als auch klärende Diskussionen schulde ich ihm besonderen Dank.

Der Max-Planck-Gesellschaft danke ich für die guten Arbeitsbedingungen am Institut für extraterrestrische Physik und das mir gewährte Stipendium.

LITERATURVERZEICHNIS

- Abramowitz M., Stegun I. (Hrsg.) 1965, Handbook of Mathematical Functions (New York: Dover)
- Adams T.F. *et al.* 1971, JQSRT 11, 1365
- Alme M.L., Wilson J.R. 1973, Ap.J. 186, 1015
- Anzer U., Börner G. 1980, A&Ap. 83, 183
- Arnett W.D., Bowers R.L. 1977, Ap.J. Suppl. 33, 415
- Arons J., Lea S. 1980, Ap.J. 235, 1016
- Baade F., Zwicky H. 1934, Phys. Rev. 45, 138
- Bai T. 1980, Ap.J. 239, 999
- Baity W.A., Peterson L.E. (Hrsg.) 1979, X-ray Astronomy (Oxford: Pergamon)
- Basko M.M. 1976, Astrophysics (Astrofizika) 12, 169
- Basko M.M., Sunyaev, R.A. 1975, A&Ap. 42, 311
- Basko M.M., Sunyaev, R.A. 1976a, MNRAS 175, 395
- Basko M.M., Sunyaev, R.A. 1976b, Sov. Astr. 20, 537
- Becker R.H. *et al.* 1977, Ap.J. 214, 879
- Bekefi G. 1966, Radiation Processes in Plasmas (New York: Wiley)
- Bonazzola S. *et al.* 1979, A&Ap. 78, 53
- Born M. 1932, Optik (Berlin: Springer), S.232 ff
- Börner G. 1980, Phys. Reports 60, 151
- Börner G., Mészáros P. 1979a, A&Ap. 77, 178
- Börner G., Mészáros P. 1979b, Plasma Physics 21, 357
- Bradt H. *et al.* 1978, IAU/COSPAR Conf. on X-ray Astronomy, Innsbruck (--> Baity & Peterson 1979, S.3)
- Brinkmann W. 1980, A&Ap. 82, 352
- Bussard W. 1980, Ap.J. 237, 970
- Canuto V., Chiu H.Y. 1970, Phys. Rev. A 2, 518
- Canuto V., Ventura J. 1977, Fundamentals of Cosmic Physics 2, 203
- Canuto V. *et al.* 1971, Phys. Rev. D 3, 2303

- Chanan G.A. *et al.* 1979, *Ap.J.* 228, L 71
- Chandrasekhar S. 1957, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (New York: Dover), S.199ff
- Chandrasekhar S. 1960, *Radiative Transfer* (New York: Dover)
- Coe M.J. *et al.* 1977, *Nature* 268, 508
- Cooper G. 1971, *Phys. Rev. D* 3, 2312
- Daishido T. 1975, *Publ. Astr. Soc. Japan* 27, 181
- Daugherty J.K., Ventura J. 1977, *A&Ap.* 61, 723
- Daugherty J.K., Ventura J. 1978, *Phys. Rev. D* 18, 1053
- Davidson A. *et al.* 1972, *Ap.J.* 177, L97
- Davidson K. 1973, *Nature Phys. Sci.* 246, 1
- Dennis B.R. *et al.* 1978, *Nature* 275, 195
- Dirac P.A.M. 1958, *Principles of Quantum Mechanics* (4. Aufl., Oxford: Clarendon), S. 201 ff
- Drummond W.E., Rosenbluth M.N. 1963, *Phys. Fluids* 6, 276
- Erber T. 1961, *Nature* 190, 25
- Feautrier P. 1964, *C. R. Acad. Sci. Paris* 258, 3189
- Felten J.E., Rees M.J. 1972, *A&Ap.* 17, 226
- Felten J.E. *et al.* 1972, *A&Ap.* 21, 139
- Feynman R.P. 1963, *Lectures on Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley) Bd.I, Kap. 31
- Feynman R.P. 1969, *Quantenelektrodynamik* (Mannheim: BI)
- Forman W. *et al.* 1972, *Ap.J.* 177, L103
- Fried B.D., Conte S.D. 1961, *The Plasma Dispersion Function* (London: Academic)
- Friedman H. 1979, *Proc. Roy. Soc. A* 366, 423
- Ghosh P., Lamb F.K. 1979, *Ap.J.* 232, 259
- Ghosh P. *et al.* 1977, *Ap.J.* 217, 578
- Giacconi R., Gursky H. (Hrsg.) 1974, *X-ray Astronomy* (Dordrecht: Reidel)
- Giacconi R. *et al.* 1962, *Phys. Rev. Lett.* 9, 439
- Giacconi R. *et al.* 1971, *Ap.J.* 165, L 27
- Giacconi R. *et al.* 1973, *Ap.J.* 184, 227

- Giacconi R. *et al.* 1979, Ap.J. 230, 540
- Ginzburg V.L. 1970, The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas (Oxford: Pergamon), 2. Aufl., S.129
- Gnedin Yu.N., Pavlov G.G. 1974, JETP 38, 903
- Gnedin Yu.N., Sunyaev R.A. 1973, A&Ap. 25, 233
- Gnedin Yu.N., Sunyaev R.A. 1974a, A&Ap. 36, 379
- Gnedin Yu.N., Sunyaev R.A. 1974b, JETP 38, 51
- Gnedin Yu.N. *et al.* 1978a, JETP Lett. 27, 305
- Gnedin Yu.N. *et al.* 1978b, Sov. Astr. Lett. 4, 117
- Gold T. 1968, Nature 221, 25
- Gursky H., Ruffini R. (Hrsg.) 1975, Neutron Stars, Black Holes, and Binary X-ray Sources (Dordrecht: Reidel)
- Hamada T. 1975, Publ. Astr. Soc. Japan 27, 275
- Hamada T., Kanno S. 1974, Publ. Astr. Soc. Japan 26, 421
- Hameury J.M. *et al.* 1980, A&Ap. 90, 359
- Harnden F.R. *et al.* 1979, Ap.J. 234, L 51
- Harris E.G. 1965, Phys. Rev. 138, B479
- Herold H. 1979a, Phys. Rev. D 19, 2868
- Herold H. 1979b, "Quantum Mechanical Definition of the Polarization Modes of a Plasma", Vortrag gehalten am MPI für Astrophysik, München
- Herold H. *et al.* 1981, Plasma Physics (~~im Druck~~) 23, 775
- Hoffmeister C. 1941, Kl. Veröff. d. Univ.-Sternwarte Berlin-Babelsberg, Nr: 24
- Holt S.S. 1974, Ap.J. 190, L 109
- Hosea J. *et al.* 1977, Phys. Rev. Lett. 39, 408
- Huang K. 1964, Statistische Mechanik (Mannheim: BI), Bd.I, S.80
- Hui A.K. *et al.* 1978, JQSRT 19, 509
- Humliček J. 1979, JQSRT 21, 309
- Hummer D.G. 1962, MNRAS 125, 21
- Ishimaru A. 1978, Wave Propagation and Scattering in Random Media (New York: Academic), Bd.2, Kap.14
- Jackson J.D. 1962, Classical Electrodynamics (New York: Wiley)

- Joss P.C. *et al.* 1977, Ap.J. 214, 874
- Joss P.C. *et al.* 1978, Ap.J. 225, 994
- Kaminker A.D. *et al.* 1976, Sov. Astr. 20, 436
- Kanno S. 1975, Publ. Astr. Soc. Japan 27, 287
- Kanno S. 1980, Publ. Astr. Soc. Japan 32, 105
- Kanno S., Hamada T. 1975, Publ. Astr. Soc. Japan 27, 545
- Karzas W.J., Latter R. 1961, Ap.J. Suppl. 6, 167
- Kendziorra E. *et al.* 1977, Ap.J. 217, L93
- Kirk J. 1980, Plasma Physics 22, 639
- Kirk J., Mészáros P. 1980, Ap.J. 241, 1153
- Klein J.J. 1968, Rev. Mod. Phys. 40, 523
- Kompaneets A.S. 1957, JETP 4, 730
- Krall N.A., Trivelpiece A.W. 1973, Principles of Plasma Physics (New York: McGraw-Hill)
- Krylov V.I. 1962, Approximate Calculation of Integrals (London: MacMillan), S.347
- Landau L.D. 1930, Zs. f. Phys. 64, 629
- Landau L.D., Lifschitz E.M. 1963, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. II (Berlin: Akademie)
- Landau L.D., Lifschitz E.M. 1971, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. IVa (Berlin: Akademie)
- Landau L.D., Lifschitz E.M. 1974, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. III (Berlin: Akademie, 5.Aufl.)
- Langer S.H. 1981, Phys. Rev. D 23, 328
- Langer S.H. *et al.* 1980, Ap.J. 238, 731
- Lamb F.K. *et al.* 1973, Ap.J. 184, 271
- Lodenquai J. *et al.* 1974, Ap.J. 190, 141
- Maurer G.S. *et al.* 1979, Ap.J. 231, 906
- Mazets E.P. *et al.* 1981, Nature 290, 378
- McCray R., Lamb F.K. 1976, Ap.J. 204, L115
- Melrose D.B. 1981, A&Ap. (~~in Druck~~) 101, 284
- Melrose D.B., Zheleznyakov V.V. 1981, A&Ap. 95, 86
- Mészáros P. 1978, A&Ap. 63, L 19

- Mészáros P., Ventura J. 1978, Phys. Rev. Lett. 41, 5144
- Mészáros P., Ventura J. 1979, Phys. Rev. D 19, 3565
- Mészáros P. et al. 1980, Ap.J. 238, 1066
- Mihalas D. 1978, Stellar Atmospheres, 2.Aufl. (San Francisco: W.H.Freeman)
- Miyamoto S. 1978, A&Ap. 63, 69
- Morse P.M., Feshbach H. 1953, Methods of Theoretical Physics (New York: McGraw-Hill) Bd.I, S.187
- Nagel W. 1980, Ap.J. 236, 904
- Novick R. et al. 1977, Ap.J. 215, L 117
- Pacini F. 1967, Nature 216, 567
- Pacini F. 1968, Nature 219, 145
- Pavlov G.G., Kaminker A.D. 1975, Sov. Astr. Lett. 1, 181
- Pavlov G.G., Panov A.N. 1976, JETP 44, 300
- Pavlov G.G., Shibarov Yu.A. 1978, Sov. Astr. 22, 214
- Pavlov G.G., Yakovlev D.G. 1976, JETP 43, 389
- Pavlov G.G., Yakovlev D.G. 1977, Astrophysics (Astrofizika) 13, 89
- Pavlov G.G. et al. 1980a, Pis'ma ZhETF 30, 137
- Pavlov G.G. et al. 1980b, Ap. & Space Sci. 73, 33
- Pavlov G.G. et al. 1980c, Ap. & Space Sci. 73, 63
- Pauli W. 1928, Festschrift zum 60. Geburtstage von Arnold Sommerfeld (Leipzig: Hirzel)
- Petterson J.A. 1977, Ap.J. 218, 783
- Pomraning G.C. 1973, The Equations of Radiation Hydrodynamics (Oxford: Pergamon)
- Pozdnyakov L.A. et al. 1979, Sov. Astr. Lett. 5, 149
- Pravdo S.H. 1976, Dissertation Univ. of Maryland
- Pravdo S.H. et al. 1977, Ap.J. 216, L23
- Pravdo S.H. et al. 1978, Ap.J. 225, 988
- Pravdo S.H. et al. 1979a, MNRAS 188, 5P
- Pravdo S.H. et al. 1979b, Ap.J. 231, 912
- Rose L.A. et al. 1979, Ap.J. 231, 919

- Ruderman M. 1972, Ann. Rev. Astr. Ap. 10, 427
- Sakurai J.J. 1967, Advanced Quantum Mechanics (Reading, Mass.: Addison Wesley), S.62ff
- Salpeter E. 1964, Ap.J. 140, 796
- Schreier E. et al. 1972, Ap.J. 172, L 79
- Shapiro S.L., Salpeter E.E. 1975, Ap.J. 198, 671
- Shibanov Yu.A. 1978, Sov. Astron. 22, 706
- Shulman S. et al. 1975, Ap.J. 199, L101
- Silant'ev N.A. 1979, Sov. Astr. 23, 21
- Silant'ev N.A. 1981, Ap. & Space Sci. (~~im Druck~~) 82, 363
- Sobolev V.V. 1963, A Treatise on Radiative Transfer (Princeton: van Nostrand)
- Sokolov A.A., Ternov I.M. 1968, Synchrotron Radiation (Berlin: Akademie-Verlag)
- Stix T.H. 1965, Phys. Rev. Lett. 15, 878
- Sunyaev R.A., Titarchuk L.G. 1980, A&Ap. 86, 121
- Tananbaum H. et al. 1972, Ap.J. 174, L143
- Trümper J. 1978a, Vortrag am MPI für Astrophysik, München
- Trümper J. 1978b, IAU/COSPAR Conf. on X-ray Astronomy, Innsbruck (→ Baity & Peterson 1979, S.239)
- Trümper J. 1981, Workshop on Galactic Compact Objects, Bad Honnef
- Trümper J. et al. 1977, Ann. N.Y. Acad. Sci. 302, 538
- Trümper J. et al. 1978, Ap.J. 219, L105
- Tucker W., Blumenthal G. 1974, Ann. Rev. Astr. Ap. 12, 23
- Unsöld A. 1955, Physik der Sternatmosphären (2. Aufl., Berlin: Springer)
- van de Hulst H.C. 1980, Multiple Light Scattering (New York: Academic), Bd.2, S.555f.
- van Hove L. 1955, Physica 21, 517
- Ventura J. 1973, Phys. Rev. A 8, 3021
- Ventura J. 1979, Phys. Rev. D 19, 1684
- Ventura J. et al. 1979, Ap.J. 233, L 125
- Virtamo J., Jauho P. 1973, Ap.J. 182, 935

- Virtamo J., Jauho P. 1975, Nuovo Cimento 26B, 537
- Voges W. et al. 1978, IAU/COSPAR Conf. on X-ray Astronomy, Innsbruck (--> Baity & Peterson 1979, S.485)
- Wang Y.M., Frank J. 1981, A&Ap. (~~im Druck~~) 93, 255
- Wang Y.M., Welter G.L. 1981, A&Ap. (~~im Druck~~) 102, 97
- Wasserman I., Salpeter E. 1980, Ap.J. 241, 1107
- Wheaton W.A. et al. 1979, Nature 282, 240
- Wigner E.P. 1932, Phys. Rev. 40, 749
- Wilson D.B. 1980, MNRAS 192, 787
- Wolf E. 1976, Phys. Rev. D 13, 869
- Yahel R.Z. 1979a, A&Ap. 78, 136
- Yahel R.Z. 1979b, Ap.J. 229, L73
- Yahel R.Z. 1980a, Ap.J. 236, 911
- Yahel R.Z. 1980b, A&Ap. 90, 26
- Zel'dovich Ya.B. 1964, Sov. Phys. Dokl. 9, 195
- Zel'dovich Ya.B., Shakura N.I. 1969, Sov. Astr. 13, 175
- Zheleznyakov V.V. 1970, Radio Emission of the Sun and Planets (Oxford: Pergamon), S.413ff.
- Zheleznyakov V.V. et al. 1974, Sov. Astron. 18, 142
- Ziman J.M. 1972, Principles of the Theory of Solids (2. Aufl., Cambridge: Univ. Press), S. 259
- Zurmühl R. 1964, Matrizen und ihre technischen Anwendungen (Berlin: Springer), 4.Aufl., S.58

LEBENS LAUF

Werner Wilhelm Nagel

- 09.03.53 geboren in Detmold/Lippe als Sohn des Journalisten Ernst Nagel und der Friseurin Erika Nagel (Sewöster)
- 1955 Umzug der Familie nach München
- Sep. 59 Einschulung in die "Städtische Volksschule an der Senftenauer Straße" in München-Laim
- Sep. 62 Umzug nach Langenfeld (Rheinland), Besuch der vierten Volksschulklasse bis März 1963
- Apr. 63 Aufnahme in das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium "Landrat-Lucas-Schule I" in Opladen
- Apr. 66 vorzeitige Versetzung von der 9. in die 10. Klasse wegen überdurchschnittlicher Leistungen
- 15.06.70 Abitur
- 13.10.70 Immatrikulation an der Universität zu Köln, Studium der Physik
- 29.06.72 Vordiplom in Physik (mit der Note "sehr gut")
- Okt. 72 Studienjahr am Theoretical Physics Department der University of Liverpool als Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes
- Juli 73
- Nov. 73 Fortsetzung des Physikstudiums an der TU München
- Nov. 74 Anfertigung einer theoretischen Diplomarbeit bei Prof. S. Fischer über Relaxationsprozesse in Molekülen
- Feb. 76
- 11.06.76 Diplom in Physik ("mit Auszeichnung bestanden")
- 03.10.76 Grundwehrdienst, ab 01.12.76 im Fachbereich Luft- und Raumfahrttechnik der Bundeswehr-Hochschule München (Wiss. Einrichtung "Technische Mechanik")
- 22.12.77
- Jan. 78 Anfertigung einer theoretischen Doktorarbeit am Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik bei Prof. J. Trümper über "Strahlungstransport in einem stark magnetisierten Plasma"
- Juli 81

